MATHEMATIK FUER OEKONOMEN

Band 3

von

Margrit Gauglhofer und Hans Loeffel

1993

Verlag Wilhelm Surbir St. Gallen

Prof. Dr. Margrit Gauglhofer und Prof. Dr. Hans Loeffel
Bodanstrasse 4, CH-9000 St. Gallen, Tel. 071/302 430 und 302 432

Verlag Wilhelm Surbir
Dufourstrasse 48, CH-9000 St. Gallen, Tel. 071/302 301 und 383616, Fax 071/302 646

VORWORT

Der vorliegende Band 3 ist als Ergänzung und Erweiterung der Mathematikausbildung für Oekonomen gedacht.

In einem ersten Teil werden die Grundlagen zur Behandlung dynamischer Prozesse gelegt. Im Vordergrund stehen dabei Differentialgleichungen und Systeme von Differential- und Differenzengleichungen. Spezielles Gewicht wird auf graphische Methoden der Analyse gelegt.

In einem zweiten Teil gelangen verschiedene Methoden der Optimierung zur Anwendung:

- Die Methode der Lagrange-Multiplikatoren,
- lineare und nichtlineare Optimierung.

Unser herzlicher Dank richtet sich an Marie-Claire Baumann, die mit grosser Fachkenntnis und Engagement einen überwiegenden Teil des Manuskriptes auf den Computer gebracht hat.

Ganz besonderer Dank gebührt Andrea Haidorfer, die den gesamten Text sorgfältig durchgesehen hat und für die Ausmerzung vieler Druck- und Rechenfehler verantwortlich war. Claudia Emele, Niklaus Schäfer, Guy Wolfensberger und Jens Hofmann haben Teile des Manuskriptes getippt und/oder durchgelesen. Auch ihnen sei an dieser Stelle bestens gedankt.

St. Gallen, im Juli 1993

Margrit Gauglhofer-Witzig

Hans Loeffel

INHALTSVERZEICHNIS

I. DYNAMIK. DIFFERENTIAL- UND DIFFERENZENGLEICHUNGEN

1. Einleitung. Existenz und Eindeutigkeit der Lösung 1

2. Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten und konstanter rechter Seite 12
   Anwendung : Marktpreis - Dynamik 15
   Anwendung : Logistisches Wachstum 16

3. Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung mit variablem Koeffizienten und variabler rechter Seite 18

4. Exakte Differentialgleichungen. Differentialgleichungen mit separierbaren Variablen 21

5. Qualitativ-graphische Methode 33
   Anwendung: Qualitativ-graphische Analyse des Wachstumsmodelles von Solow 36

6. Lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten 41
   Anwendung: Das Richardson'sche Wettrüstungsmodell 47
   Anwendung: Ein Marktmodell mit Preiserwartung 53

7. Systeme von Differentialgleichungen. Qualitativ-graphische Analyse: Phasendiagramme in 2 Variablen 57
   Oekologische Anwendung: Räuber-Beute-Modelle 66

8. Differenzengleichungen 1. und 2. Ordnung 71
   Anwendung : Lagerhaltungsmodell von Metzler 80
   Anwendung : Modifiziertes Akzeleratorprinzip 81
   Anwendung: Ein Beispiel aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung . 82

9. Systeme simultaner Differenzengleichungen 86
   Anwendung: Beispiel einer dynamischen Input-Output-Analyse .. 91
   Anwendung: Multiplikatoreneffekt in einer offenen Volkswirtschaft 93

10. Nichtlineare Differenzengleichungen 1. Ordnung: Graphische Methode . 97

II. OPTIMIERUNGSPROBLEME

11. Einleitung. Extrema von Funktionen mehrerer Variablen. Extrema unter Nebenbedingungen in Form von Gleichungen 104

12. Lineare Optimierung. Der Simplex-Algorithmus 116

13. Nicht-lineare Optimierung. Kuhn-Tucker Bedingungen 132

ANHANG
Komplexe Zahlen 148

LITERATURVERZEICHNIS 168

I. DYNAMIK

DIFFERENTIAL - UND

DIFFERENZENGLEICHUNGEN

1. EINLEITUNG. EXISTENZ UND EINDEUTIGKEIT DER LÖSUNG

Dynamische Modelle berücksichtigen die Zeitabhängigkeit ökonomischer Grössen (z.B. Volkseinkommen, Investitionen, Anlagekapital, Konsum usw.)

Dabei kann die Zeit t betrachtet werden als

a) stetige Variable oder b) diskrete Variable

a) d.h. die Grösse wird kontinuierlich beobachtet.

b) d.h. die Grösse wird in regelmässigen Zeitabständen (z.B. monatlich, jährlich) beobachtet.

Als Instrumentarium zur Analyse von dynamischen Modellen dienen

a) **Differentialgleichungen** b) **Differenzengleichungen**

Eine Differentialgleichung beschreibt, wie eine unbekannte Funktion y(t) und ihre Aenderung (1. Ableitung und ev. höhere Ableitungen) zusammenhängt, eine Differenzengleichung, wie die Funktionswerte zur Zeit t und in einer oder mehreren Vorperioden zusammenhängen.

Beispiele:

a) $y'(t) = a\,y(t)$ (*eine Differentialgleichung*)

y verändert sich proportional zum jeweiligen Wert.

b) $y_t = \frac{1}{2}\left(y_{t-1} + y_{t-2}\right)$ (*eine Differenzengleichung*)

Jeder Wert ist der Durchschnitt der Werte in den beiden Vorperioden.

Die allgemeine Lösung einer Differential- oder Differenzengleichung ist die Gesamtheit aller Funktionen, die die vorgeschriebene Gesetzmässigkeit aufweisen. Anfangsbedingungen lassen in der Regel die Bestimmung einer einzigen Lösung aus der Lösungsgesamtheit zu.

Ein **dynamisches ökonomisches Modell** verknüpft verschiedene ökonomische Grössen, unter Einbezug der Veränderungen über die Zeit.

Ein solches Modell enthält im allgemeinen

- Verhaltensgleichungen, die eine gewisse Theorie über die Ursachen-Wirkungs-Mechanismen in der Oekonomie widerspiegeln, z. B.

  a) $\frac{dP}{dt} = j(Q_d - Q_s)$; $j > 0$ oder b) $C_t = a \cdot Y_{t-1}$; $0 < a < 1$

- Definitionsgleichungen

  a) $\frac{dK}{dt} = I(t)$ b) $K_{t+1} = K_t + I_t$

Häufig lässt sich aus den Gleichungen des Modelles eine einzige Differential- oder Differenzengleichung für diejenige Grösse herleiten, für die man sich interessiert.

Was kann das Ziel einer dynamischen Analyse sein?

(1) Steuerung: Die Lösung der Differentialgleichung / Differenzengleichung gibt an, wie eine Steuergrösse (z.B. Investition) im Laufe der Zeit / in jeder Periode gewählt werden muss, damit ein ursprünglicher Gleichgewichtszustand fortbesteht.

(2) Prognosen: Die Lösungsformel gibt die Möglichkeit, eine Beobachtungsreihe zu extrapolieren, d.h. Prognosen über die Werte einer Grösse (z.B. Volkseinkommen) in der Zukunft zu machen.

(3) Stabilitätsbetrachtungen: Falls ein System sich nicht in einem Gleichgewichtszustand befindet, ist es von Interesse zu wissen, ob es sich im Laufe der Zeit einem solchen nähert.

(4) Ein Vergleich der Lösung mit der tatsächlichen zeitlichen Entwicklung einer Grösse unterstützt oder widerlegt vermutete Kausalzusammenhänge.

Klassifikation von Differential- und Differenzengleichungen:

Eine Differentialgleichung

$$y^{(n)} = F(t, y, y', y'', \dots y^{(n-1)})$$

heisst Differentialgleichung n-ter Ordnung.

$$y_{t+n} = F(t, y_t, y_{t+1}, \dots y_{t+n-1})$$

heisst Differenzengleichung n-ter Ordnung.

Beispiele:

1) $y'' + t^2 (y')^3 + y = e^t$

ist eine Differentialgleichung 2. Ordnung.

2) $y_{t+3} - y_t \cdot y_{t+2}^3 = t$

ist eine Differenzengleichung 3. Ordnung.

Treten y, y', y'', ... $y^{(n-1)}$ (bzw. y_t, y_{t+1}, ... y_{t+n-1}) nur linear auf (keine anderen als erste Potenzen, auch keine Produkte), so heisst die Differential- bzw. die Differenzengleichung linear.

Beispiele:

3) $y' + t^2 y = a + bt^3$

ist eine lineare Differentialgleichung 1. Ordnung.

4) $y' + t \cdot y^2 = 0$

ist eine nicht-lineare Differentialgleichung 1. Ordnung.

5) $y'' + y' \cdot y = c$

ist eine nicht-lineare Differentialgleichung 2. Ordnung.

6) $y_{t+2} + t^2 y_{t+1} + e^t y_t = k$

ist eine lineare Differenzengleichung 2. Ordnung.

7) $y_{t+2} + (y_{t+1})^2 - y_t = 0$

ist eine nicht-lineare Differenzengleichung 2. Ordnung.

Ferner ist es wichtig, zwischen konstanten und variablen Koeffizienten zu unterscheiden.

Beispiele:

8) $y'' + 3y' - 10y = e^t$

ist eine lineare Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten,

9) $y_{t+2} + t^2 y_t = 0$

dagegen ist eine Differenzengleichung 2. Ordnung mit nicht-konstanten Koeffizienten.

Im folgenden befassen wir uns zunächst mit Differentialgleichungen. Differenzengleichungen werden in den Kapiteln 8, 9 und 10 behandelt.

Differentialgleichungen 1. Ordnung: Existenz und Eindeutigkeit der Lösung

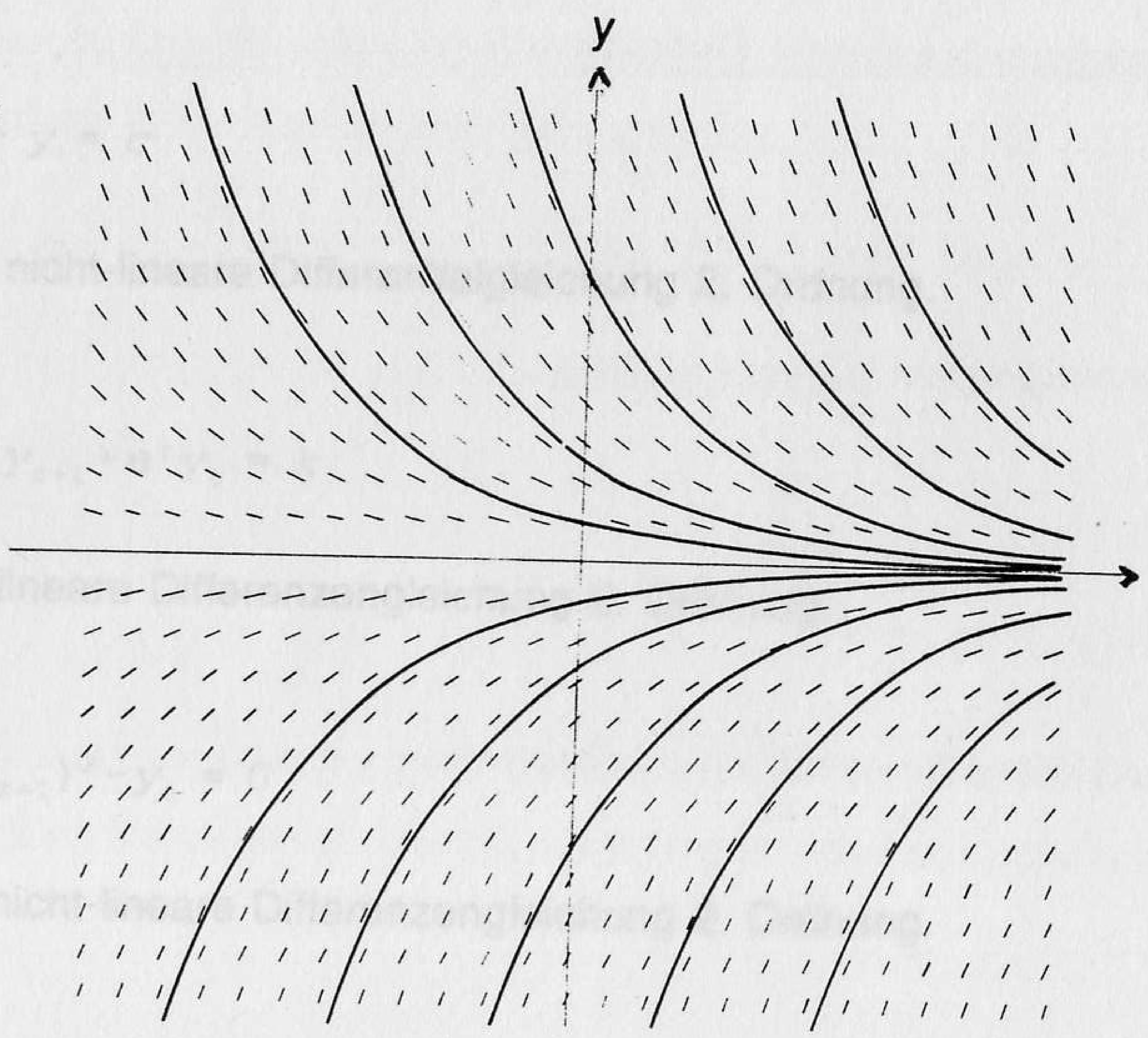
Wir betrachten Differentialgleichungen der Form $y'(t) = f\,[t,y(t)]$ oder kurz

$$y' = f(t,y) \qquad \text{(1. Ordnung)}$$

Um das Verhalten von Lösungen zu untersuchen, tragen wir in verschiedenen Punkten (t,y) der Ebene ein kurzes Geradensegment mit Steigung $m = f(t,y)$ ab, d.h. wir zeichnen das "Richtungsfeld" der Differentialgleichung.

Beispiel:

1) $y' = -y$



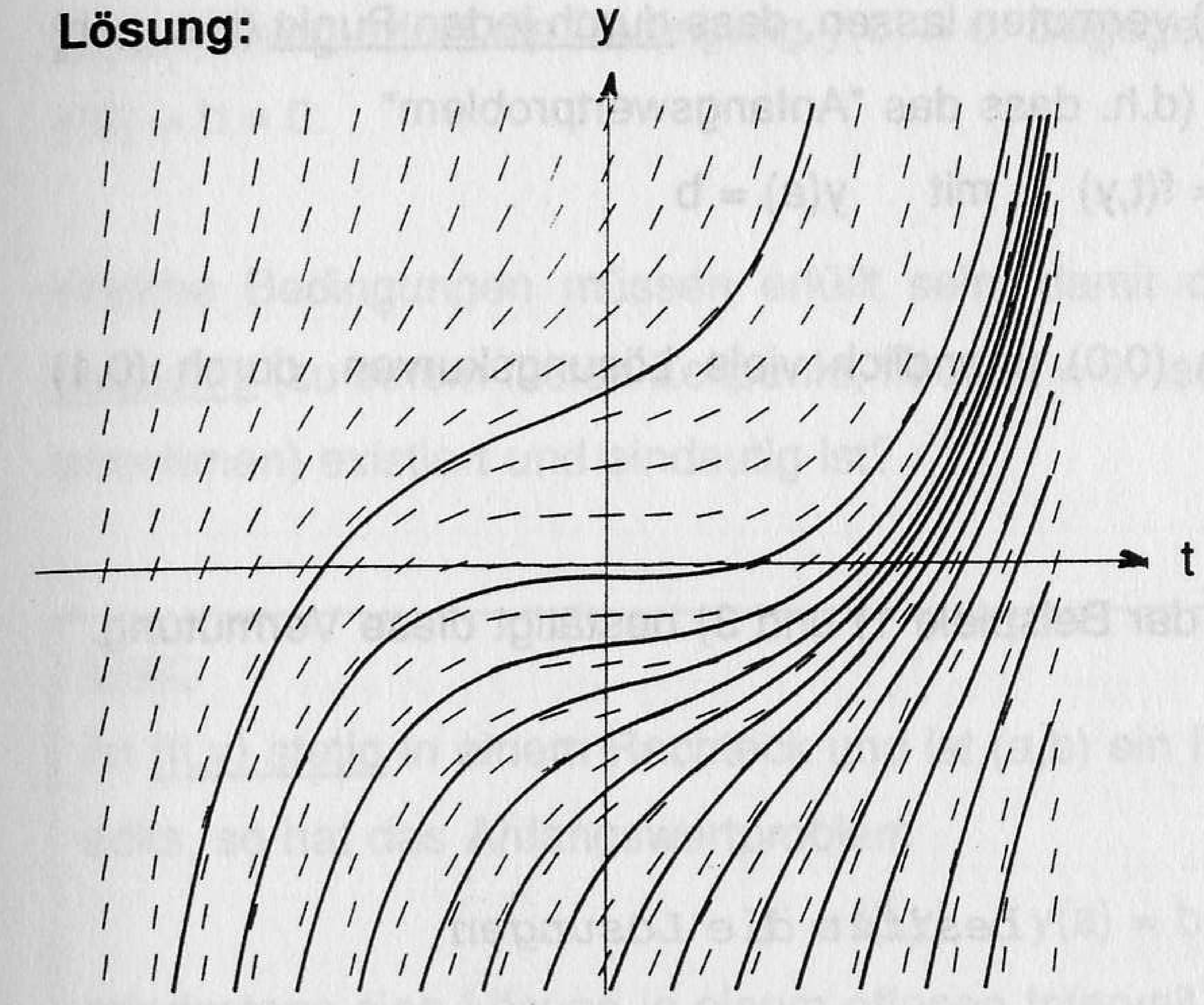
Eine Lösung ist eine Kurve **tangential** zu jedem der Segmente, auf welches sie trifft.

Aufgabe

Man suche Richtungsfeld und einige Lösungskurven für die folgenden Differentialgleichungen.

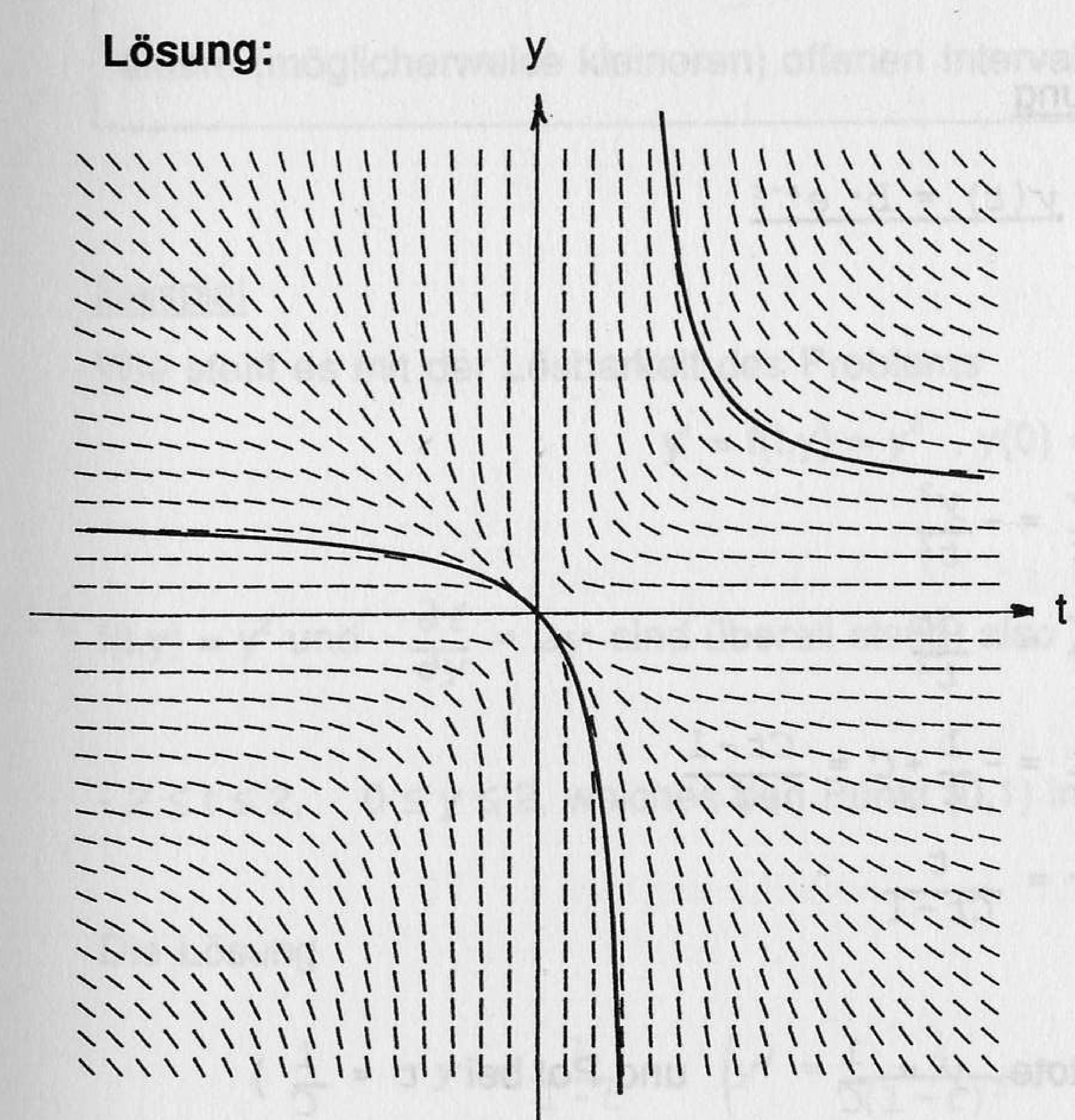
2) $y' = t^2 + y^2$

Lösung:



3) $y^2 + t^2 y' = 0 \qquad \left(d.h.\ y' = -\dfrac{y^2}{t^2} \right)$

Lösung:



Während die Beispiele 1) und 2) vermuten lassen, dass durch jeden Punkt (t=a, y=b) genau eine Lösungskurve führt (d.h. dass das "Anfangswertproblem"

$$y' = f(t,y) \quad \text{mit} \quad y(a) = b$$

genau eine Lösung besitzt),

so gehen in Beispiel 3) durch (0,0) unendlich viele Lösungskurven, durch (0,1) hingegen keine.

Eine analytische Untersuchung der Beispiele 1) und 3) bestätigt diese Vermutung.

1)

$$y' = -y$$

$$\frac{dy}{y} = -dt \qquad \textit{besitzt die Lösungen}$$

$$y(t) = A \cdot e^{-t} \qquad (\textit{Nachweis ?})$$

Die Bedingung y(a) = b lässt die Bestimmung von A zu:

$$b = A \cdot e^{-a} \quad \Rightarrow \quad A = b \cdot e^{a}$$

Durch (a,b) geht genau eine Lösung

$$\underline{y(t) = b \cdot e^{a-t}}$$

3)

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{y^2}{t^2}$$

$$\frac{dy}{y^2} = -\frac{dt}{t^2}$$

$$\frac{1}{y} = -\frac{1}{t} + C = \frac{Ct-1}{t}$$

$$y = \frac{t}{Ct-1}$$

(Schar von Hyperbeln mit Asymptote $y = \frac{1}{C}$ und Pol bei $t = \frac{1}{C}$)

Jede Lösung erfüllt die Bedingung y(0) = 0. Dagegen existiert keine Lösung mit y(0) = b ≠ 0.

Welche Bedingungen müssen erfüllt sein, damit die Lösung eines Anfangswertproblems (zu einem festen Zeitpunkt, häufig t = 0, soll die Lösung einen festen Wert annehmen) existiert und eindeutig ist?

Satz:
Ist f(t,y) stetig in einem Rechteck und ist (a,b) ein Punkt im Innern dieses Rechtecks, so hat das Anfangswertproblem

$$y' = f(t,y) \quad , \quad y(a) = b$$

mindestens eine Lösung in einem offenen Intervall J, das t = a enthält.

Ist ferner $\frac{\partial f}{\partial y}$ stetig auf diesem Rechteck, dann ist die Lösung eindeutig auf einem (möglicherweise kleineren) offenen Intervall J_0, das t = a enthält.

Beispiel

Wie steht es mit der Lösbarkeit des Problems

$$y' = f(t,y) = y^2 \quad , \; y(0) = 1 ?$$

$f(t,y) = y^2$ und $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y$ sind überall stetig, also z. B. auch auf dem Rechteck

$-2 \le t \le 2, \quad 0 \le y \le 2$, welches den Punkt (0,1) im Innern enthält.

Die Lösung

$$y = \frac{1}{1-t} \qquad \left(y' = \frac{1}{(1-t)^2} = y^2 \; , \; y(0) = 1 \right)$$

existiert aber nicht für $t = 1$, also nicht für alle t im Bereich $-2 \le t \le 2$, dagegen im kleineren Intervall $J_0 = \{ t \mid -2 < t < 1\}$.

Für eine wichtige Klasse von Differentialgleichungen, die linearen Differentialgleichungen 1. Ordnung, gilt sogar ein stärkerer

Existenz- und Eindeutigkeitssatz:

a(t) und b(t) seien stetig auf einem Intervall J; a liege im Innern von J. Dann besitzt die Differentialgleichung

$$y' = a(t)\, y + b(t)\ ,\ y(a) = b$$

eine eindeutige Lösung auf ganz J.

Das folgende Beispiel illustriert, dass ausserhalb J die Lösung nicht eindeutig sein muss.

Beispiel:

$y' = \frac{2}{t}\, y$ hat Lösung $y(t) = ct^2$.

Anfangsbedingung: $y(-1) = 1$

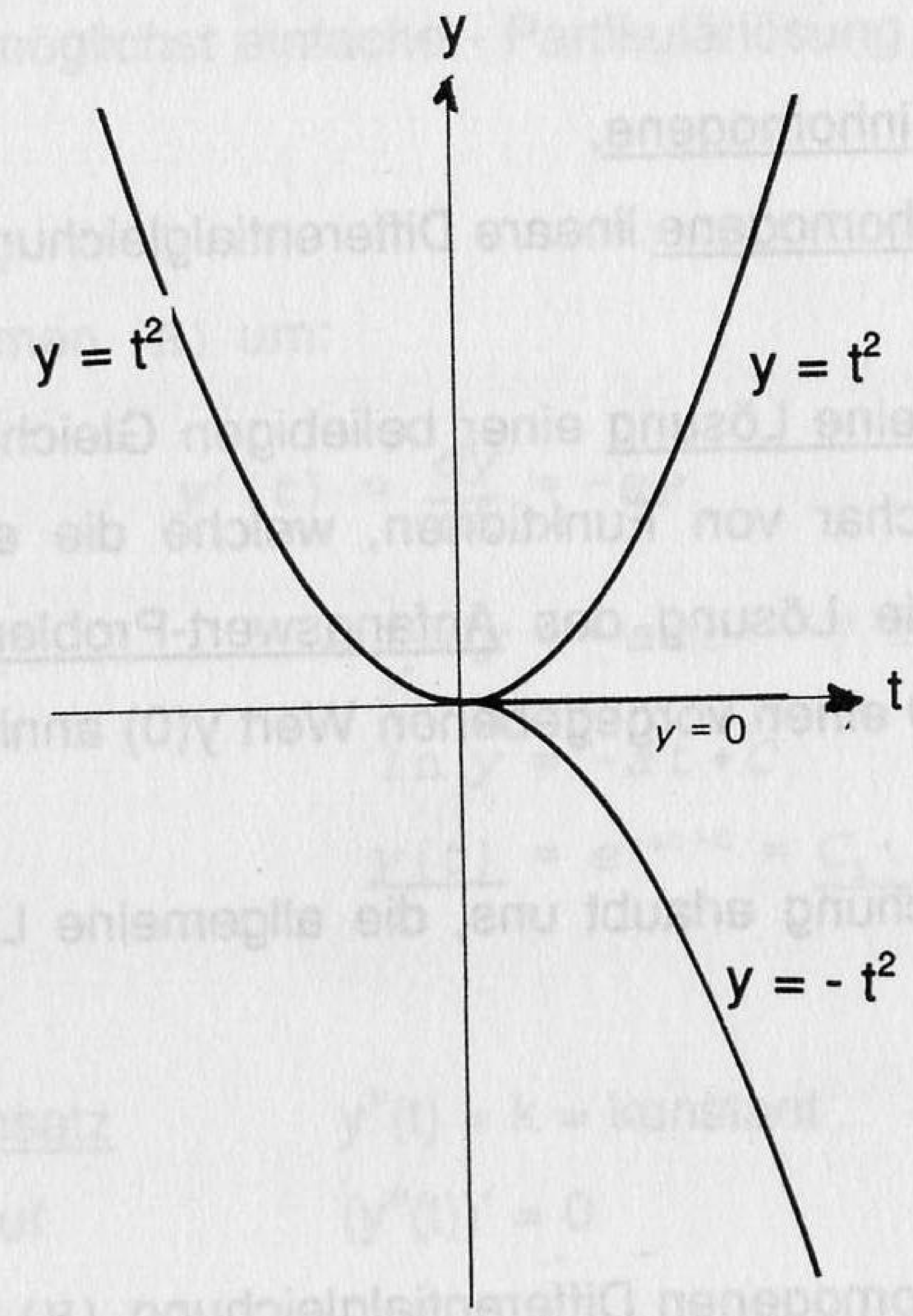
Im Intervall $(-\infty,0)$, welches -1 enthält, ist $a(t) = \frac{2}{t}$ stetig.

Die eindeutige Lösung in $(-\infty,0)$ ist $y(t) = t^2$.

Hingegen ist die gesamte Kurvenschar (∞ viele Funktionen)

$$y(t) = \begin{cases} t^2 & ,\quad t < 0 \\ ct^2 & ,\quad t \ge 0 \quad ,\quad c \text{ beliebig} \end{cases}$$

Lösung des obigen Anfangswertproblems, wenn wir die Einschränkung auf $t < 0$ fallen lassen.



Drei der Lösungen von

$$y' = \frac{2}{t}\, y\ ,\quad y(-1) = 1$$

2. LINEARE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN 1. ORDNUNG MIT KONSTANTEN KOEFFIZIENTEN UND KONSTANTER RECHTER SEITE

(I) $y'(t) + a\,y(t) = b$ heisst inhomogene,

(H) $y'(t) + a\,y(t) = 0$ heisst homogene lineare Differentialgleichung 1. Ordnung.

Gesucht ist einerseits die allgemeine Lösung einer beliebigen Gleichung (I) oder (H), d.h. eine 1-parametrige Schar von Funktionen, welche die entsprechende Gleichung erfüllen, anderseits die Lösung des Anfangswert-Problems, d.h. eine bestimmte Lösung, welche für t=0 einen vorgegebenen Wert y(0) annimmt.

Die Linearität der Differentialgleichung erlaubt uns, die allgemeine Lösung additiv aufzubauen:

Satz :

a) Ist $y^{(H)}(t)$ eine Lösung der homogenen Differentialgleichung (H) und $y^*(t)$ eine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung (I), so ist

$$y(t) = y^{(H)}(t) + y^*(t)$$

eine Lösung von (I).

b) Die allgemeine Lösung von (I) ist gleich der Summe der allgemeinen Lösung von (H) und einer (beliebigen) Partikulärlösung $y^*(t)$ von (I).

Beweis von a):

$y^{(H)}(t)$ löst (H) $\Leftrightarrow$ $(y^{(H)}(t))' + a\,y^{(H)}(t) = 0$

$y^*(t)$ löst (I) $\Leftrightarrow$ $(y^*(t))' + a\,y^*(t) = b$

$$(y^{(H)}(t))' + (y^*(t))' + a\,(y^{(H)}(t) + y^*(t)) = b$$

$$\underbrace{(y^{(H)}(t) + y^*(t))'}_{y'(t)} + a\,\underbrace{(y^{(H)}(t) + y^*(t))}_{y(t)} = b$$

$y(t) = y^{(H)}(t) + y^*(t)$ ist Lösung von (I).

Um die allgemeine Gleichung (I) zu lösen, suchen wir

(1) die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung

(2) eine - möglichst einfache - Partikulärlösung der inhomogenen Gleichung.

Durchführung:

(1) Wir formen (H) um:

$$y'(t) = \frac{dy}{dt} = -ay$$

$$\frac{1}{y}\,dy = -a\,dt \quad / \text{ integrieren}$$

$$\ln y = -at + C$$

$$\underline{y(t)} = e^{-at+C} = \underline{C_1 \cdot e^{-at}}$$

(2) Der Ansatz $y^*(t) = k =$ konstant

führt auf $(y^*(t))' = 0$

Durch Einsetzen in (I) finden wir

$$0 + ak = b\,, \quad d.h. \quad k = \frac{b}{a} \quad (\text{falls } a \neq 0)$$

Nach Satz 2b) ist die allgemeine Lösung

$$y(t) = C_1\,e^{-at} + \frac{b}{a}\,, \qquad a \neq 0$$

Interpretation der Konstanten C_1 :

Für t=0 gilt

$$y(0) = C_1 \cdot e^0 + \frac{b}{a}\,, \quad d.h.$$

$$C_1 = y(0) - \frac{b}{a}$$

Lösung:

$$y(t) = \left(y(0) - \frac{b}{a}\right) \cdot e^{-at} + \frac{b}{a}, \quad a \neq 0$$

Spezialfall a=0

Die Differentialgleichung (I) reduziert sich zur direkt integrierbaren Gleichung

$y'(t) = b$ / integrieren

$y(t) = bt + C_2$

Anfangsbedingung: $y(0) = b \cdot 0 + C_2 = C_2$

Lösung: $y(t) = y(0) + bt$, $a = 0$

Zusammenfassung:

Die Gleichung	$y'(t) + ay(t) = b$
hat Lösung	$y(t) = \left(y(0) - \frac{b}{a}\right) e^{-at} + \frac{b}{a}, \quad a \neq 0$
	$y(t) = y(0) + bt, \quad a = 0$

Beispiel: $y' + 3y = 9$, $y(0) = -3$

Lösung:

$$y(t) = \left(-3 - \frac{9}{3}\right) \cdot e^{-3t} + \frac{9}{3}$$
$$= 3 - 6\, e^{-3t}$$

Anwendung 1: **Marktpreis - Dynamik**

Für ein gewisses Gut seien Angebot $Q_s(t)$ und Nachfrage $Q_d(t)$ als Funktionen des Preises $P(t)$ gegeben durch die Gleichungen

$$(i) \quad Q_d(t) = \alpha - \beta\, P(t)$$
$$(ii) \quad Q_s(t) = -\gamma + \delta\, P(t) \qquad \alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta > 0$$

Anstatt Marktgleichgewicht ($Q_s(t) = Q_d(t)$) vorauszusetzen, stellen wir uns folgenden Preisregulierungs-Mechanismus vor:

$$(iii) \quad \frac{dP}{dt} = j\,(Q_d - Q_s), \quad j > 0$$

Setzt man (i) und (ii) in (iii) ein, so erhält man die Differentialgleichung

$$\frac{dP}{dt} = j\,(\alpha - \beta\, P(t) + \gamma - \delta\, P(t))$$

beziehungsweise

$$\frac{dP}{dt} + \underbrace{j(\beta+\delta)}_{a}\, P(t) = \underbrace{j(\alpha+\gamma)}_{b}$$

mit der Lösung:

$$P(t) = e^{-j(\beta+\delta)t}\left(P(0) - \frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}\right) + \frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}$$

Beachte: Für $t \to \infty$ strebt $e^{-j(\beta+\delta)t} \to 0$, d.h.

$$P(t) \underset{t\to\infty}{\to} P^* = \frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta},$$

den Wert, der dem (statischen) Gleichgewichtspreis entspricht.

Anwendung 2: **Logistisches Wachstum**

Vielen Wachstumsprozessen (z.B. Ausbreitung einer Epidemie, Wachstum einer Population bei beschränktem Nahrungsangebot oder Lebensraum) liegt folgende Gesetzmässigkeit zugrunde:

(L) $P'(t) = r \cdot \underbrace{P(t)}_{\text{Wachstums-faktor}} \cdot \underbrace{(1 - P(t))}_{\text{Bremsfaktor}}$; $r > 0$; $P(0) = P_0$

Durch die folgende einfache Transformation können wir die obige Differentialgleichung auf eine <u>lineare</u> Differentialgleichung zurückführen:

Wir setzen $y(t) = \dfrac{1}{P(t)}$

Dann ist $y'(t) = -\dfrac{1}{(P(t))^2} \cdot P'(t)$

Einsetzen in (L) ergibt:

$$y' = -\frac{1}{P^2} \cdot P' = -\frac{1}{P^2}\, rP(1-P)$$

$$= -\frac{r}{P} + r = -ry + r$$

(L') $y' + ry = r$

Lösung von (L'):

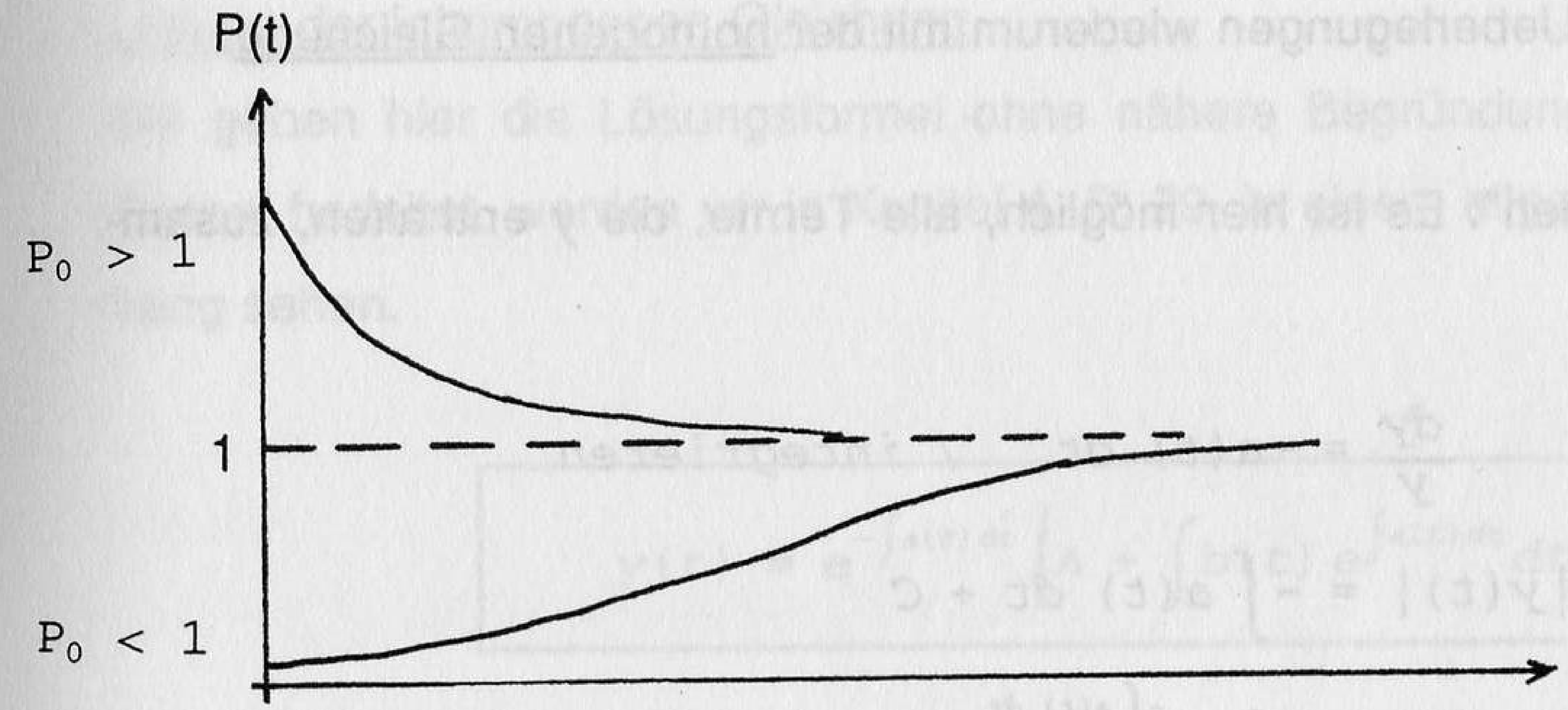
$$y(t) = (y(0) - 1)e^{-rt} + 1$$

$$P(t) = \frac{1}{y(t)} = \frac{1}{1 + \left(\dfrac{1}{P_0} - 1\right)e^{-rt}}$$

$$\underline{P(t) = \frac{P_0\, e^{rt}}{P_0\, e^{rt} - P_0 + 1}} \quad \text{('logistische Funktion')}$$

Für jeden Anfangswert $P_0 > 0$ konvergiert P(t) für $t \to \infty$ gegen den "Sättigungswert" 1.

Graphische Darstellung:



3. LINEARE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN 1. ORDNUNG MIT VARIABLEM KOEFFIZIENTEN UND VARIABLER RECHTER SEITE

$$(H) \qquad \frac{dy}{dt} + a(t)\; y(t) = 0$$

$$(I) \qquad \frac{dy}{dt} + a(t)\; y(t) = b(t)$$

Wir beginnen unsere Ueberlegungen wiederum mit der homogenen Gleichung.

"Trennung der Variablen": Es ist hier möglich, alle Terme, die y enthalten, zusammenzufassen:

$$\frac{dy}{y} = -a(t)\; dt \qquad /\; integrieren$$

$$\ln|y(t)| = -\int a(t)\; dt + C$$

$$y(t) = e^{C} \cdot e^{-\int a(t)\, dt}$$

Beispiele:

1)

$$\frac{dy}{dt} + t^2 y(t) = 0$$

$$\frac{dy}{y} = -t^2 dt$$

$$\ln y = -\frac{t^3}{3} + C \qquad \underline{y(t) = y(0) \cdot e^{-t^3/3}}$$

Kontrolle:

$$y'(t) = -t^2 y(0)\; e^{-t^3/3}$$

$$y'(t) + t^2 y(t) = -t^2 y(0)\; e^{-t^3/3} + t^2 y(0)\; e^{-t^3/3} = 0$$

2)

$$\frac{dy}{dt} - e^t y(t) = 0$$

hat Lösung

$$y(t) = c \cdot e^{(e^t)}$$

$$y(0) = c \cdot e^1 \;\Rightarrow\; c = y(0) \cdot e^{-1}$$

$$y(t) = y(0) \cdot e^{(e^t - 1)}$$

Lösung der inhomogenen Gleichung

Wir geben hier die Lösungsformel ohne nähere Begründung an. Wie man diese Formel herleitet, werden wir in Kapitel 4, S. 29 in einem allgemeineren Zusammenhang sehen.

$$\boxed{y(t) = e^{-\int a(t)\, dt} \left(A + \int b(t)\, e^{\int a(t)\, dt}\, dt\right)}$$

Anwendungsbeispiele:

1) Gesucht ist die Lösung der Differentialgleichung
y'(t) + 2t y(t) = t.
Es ist

$$\int a(t)\; dt = \int 2t\, dt = t^2 + C$$

und somit

$$y(t) = \frac{1}{e^C} \cdot e^{-t^2} \left(A + e^C \underbrace{\int t e^{t^2} dt}_{\frac{1}{2} e^{t^2} + D}\right)$$

$$= B \cdot e^{-t^2} + \frac{1}{2}$$

(*wobei* $B = A/e^C + D$ *eine beliebige Konstante bezeichnet*)

Kontrolle:

$$y'(t)+2ty(t) = -2t\cdot Be^{-t^2}+2t\left(Be^{-t^2}+\frac{1}{2}\right)$$

$$= t = \textit{Rechte Seite der Differentialgleichung}$$

2)

$$y'(t) + \frac{1}{t}y(t) = t^2$$

$$\int a(t)\,dt = \int\frac{1}{t}\,dt = \ln t + C$$

$$\int b(t)\,\underbrace{e^{\int a(t)\,dt}}_{e^{\ln t+C}}\,dt = e^C\int t^2\cdot t\,dt = e^C\frac{t^4}{4}+D$$

$$y(t) = e^{-\ln t-C}\left(A + e^C\frac{t^4}{4} + D\right)$$

$$= B\cdot\frac{1}{t} + \frac{t^3}{4} \qquad \left(B = (A+D)\cdot e^{-C} \textit{ beliebige Konstante}\right)$$

Kontrolle:

$$y'(t) = -B\cdot\frac{1}{t^2}+\frac{3t^2}{4}$$

$$y'(t) + \frac{1}{t}y(t) = -B\cdot\frac{1}{t^2}+\frac{3t^2}{4}+B\cdot\frac{1}{t^2}+\frac{t^2}{4} = \frac{4t^2}{4} = t^2$$

4. EXAKTE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN. DIFFERENTIALGLEICHUNGEN MIT SEPARIERBAREN VARIABLEN

Ist F(y,t) eine Funktion zweier Variablen, so ist das totale Differential

$$dF(y,t) = \frac{\partial F}{\partial y}dy + \frac{\partial F}{\partial t}dt$$

Setzt man dF=0, so nennt man die resultierende Gleichung

$$\frac{\partial F}{\partial y}dy + \frac{\partial F}{\partial t}dt = 0$$

exakte Differentialgleichung.

Beispiel:

F(y,t) = y^2 t besitzt das totale Differential

dF = 2yt dy + y^2 dt , daher ist

2yt dy + y^2 dt = 0 eine exakte Differentialgleichung.

Frage: Wie erkennt man, ob eine Differentialgleichung M(y,t) dy + N(y,t) dt = 0 exakt ist oder nicht?

Falls

$$M(y,t) = \frac{\partial F}{\partial y} \quad \textit{und} \quad N(y,t) = \frac{\partial F}{\partial t}$$

für eine gewisse Funktion F(y,t), so folgt aus der Gleichheit

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial t} = \frac{\partial^2 F}{\partial t\partial y}$$

die Bedingung:

$$\frac{\partial M}{\partial t} = \frac{\partial N}{\partial y}$$

Satz:

$$\frac{\partial M}{\partial t} = \frac{\partial N}{\partial y}$$

ist eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die Differentialgleichung M dy + N dt = 0 exakt ist.

Lösungsmethode für exakte Differentialgleichungen:

Da

$$M(y,t) = \frac{\partial F}{\partial y}$$

ist, muss gelten:

$$F(y,t) = \int M(y,t)\,dy + \psi(t)$$

wobei $\psi(t)$ eine (vorläufig unbekannte) Funktion von t allein ist.

Um $\psi(t)$ zu finden, machen wir Gebrauch von der Tatsache, dass $N = \frac{\partial F}{\partial t}$ ist.

Die Methode sei an zwei konkreten Beispielen erklärt.

Beispiel 1:

Man löse die exakte Differentialgleichung

$$\underbrace{2yt}_{M}\,dy + \underbrace{y^2}_{N}\,dt = 0$$

1. Schritt: Es ist

$$M = 2yt = \frac{\partial F}{\partial y},$$

d. h.

$$F(y,t) = \int 2yt\,dy + \psi(t) = y^2 \cdot t + \psi(t)$$

(Beachte: Die Integrationskonstante können wir uns in die Funktion $\psi(t)$ eingeschlossen denken.)

2. Schritt: Da

$$N = y^2 = \frac{\partial F}{\partial t}$$

ist, muss gelten $y^2 + \psi'(t) = y^2$, d.h. $\psi'(t) = 0$

$\psi(t) = k$ = konstant

3. Schritt: Setzen wir die Teilergebnisse zusammen, so finden wir

$F(y,t) = y^2 t + k$.

4. Schritt: Die exakte Differentialgleichung

dF = 0 hat Lösung $F(y,t) = c$ = konstant,

d.h. $y^2 t + k = c$

bzw. $y^2 t = c_1$ (mit $c_1 = c - k$)

Lösen wir auf nach der gesuchten Funktion y(t), so finden wir

$$\underline{y(t) = A \cdot t^{-1/2}} \qquad (mit\ A = \sqrt{c_1})$$

Beispiel 2:

$$y' + y = -\frac{\cos t}{e^t}$$

stellt eine exakte Differentialgleichung dar, wie wir nach Umformung zeigen können:

$$\frac{dy}{dt} + y + \frac{\cos t}{e^t} = 0 \qquad / \cdot \; e^t dt$$

$$\underbrace{e^t}_{M} dy + \underbrace{(e^t y + \cos t)}_{N}\, dt = 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial t} = e^t = \frac{\partial N}{\partial y}$$

Lösung der Differentialgleichung:

1. Schritt: Aus $\frac{\partial F}{\partial y} = e^t$ folgt:

$$F(y,t) = \int e^t dy + \psi(t) = e^t \cdot y + \psi(t)$$

2. Schritt: Aus $\frac{\partial F}{\partial t} = N(y,t)$ folgt:

$$e^t y + \psi'(t) = e^t y + \cos t$$
$$\psi'(t) = \cos t$$
$$\psi(t) = \sin t + c_1$$

3. Schritt: Durch Einsetzen finden wir
$F(y,t) = e^t\, y + \sin t + c_1$

4. Schritt: Aus $dF = 0$ folgt $F(y,t) = c_2$ = konstant,
d.h. $F(y,t) = e^t\, y + \sin t + c_1 = c_2$
respektive $e^t\, y + \sin t = c$ = konstant (mit $c = c_2 - c_1$)

5. Schritt: Wir lösen nach y(t) auf:
$y(t) = (c - \sin t) \cdot e^{-t}$ (Kontrolle ?)

Zusatzfrage: Gesucht ist diejenige Lösung, welche die Anfangsbedingung y(0) = 1 erfüllt.

$$y(0) = \frac{c - \sin 0}{e^0} = c = 1$$

Lösung des Anfangswertproblems:

$$y(t) = \frac{1 - \sin t}{e^t}$$

"Integrierender Faktor"

Gewisse Differentialgleichungen, wie beispielsweise

$$2t\, dy + y\, dt = 0 \qquad \left(d.h.\ y' + \frac{y}{2t} = 0\right)$$

sind nicht exakt

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}(2t) = 2 \qquad \frac{\partial}{\partial y}(y) = 1\right),$$

lassen sich aber durch Multiplikation mit einem Faktor, hier dem Faktor y, in eine exakte Differentialgleichung transformieren; im Beispiel:

$$2ty\, dy + y^2\, dt = 0$$

ist exakt, denn

$$\frac{\partial M}{\partial t} = 2y = \frac{\partial N}{\partial y}$$

Das Auffinden eines integrierenden Faktors ist keineswegs immer einfach und braucht eine gute Intuition!

Beispiel 1:

$$2t\,dy + 3y\,dt = 0 \quad / \cdot \overbrace{t^2 y}^{\text{Integrierender Faktor}}$$

$$\underbrace{2t^3 y}_{M}\,dy + \underbrace{3t^2 y^2}_{N}\,dt = 0$$

ist exakt:

$$\frac{\partial M}{\partial t} = 2 \cdot 3t^2 \cdot y = 6t^2 y \qquad \frac{\partial N}{\partial y} = 3t^2 \cdot 2y = 6t^2 y$$

Aufgabe: Man löse die Differentialgleichung
(Lösung: $y(t) = (c / t^3)^{1/2}$)

Beispiel 2:

$$\frac{dy}{dt} + \frac{2y^4 + 3t}{4y^3 t} = 0$$

Gesucht ist ein integrierender Faktor (und die Lösung)

$$\underbrace{4y^3 t}_{R}\,dy + \underbrace{(2y^4 + 3t)}_{S}\,dt = 0$$

$$\frac{\partial R}{\partial t} = 4y^3 \neq \frac{\partial S}{\partial y} = 8y^3$$

Multipliziert man dagegen die ganze Gleichung mit t, so resultiert die exakte Differentialgleichung

$$\underbrace{4y^3 t^2}_{M}\,dy + \underbrace{(2y^4 t + 3t^2)}_{N}\,dt = 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial t} = 8y^3 t = \frac{\partial N}{\partial y} = 8y^3 t$$

Anwendung:
Herleitung der Lösungsformel (S. 19) der allgemeinen linearen Differentialgleichung

$$y'(t) + a(t)\,y(t) = b(t)$$

mit Hilfe eines integrierenden Faktors.

Umformung:

$$dy + (ay - b)dt = 0$$

Es bezeichne I einen (zunächst unbekannten, möglichst einfachen) integrierenden Faktor.

$$I \cdot dy + I(ay - b)dt = 0$$

Ist es möglich, $I = I(t)$ als Funktion von t alleine (nicht aber von y) zu wählen?

Mit $M = I(t)$ und $N = I(t)(ay - b)$ ergibt die zu erfüllende Bedingung

$$\frac{\partial M}{\partial t} = \frac{\partial N}{\partial y}$$

die Gleichung

$$\frac{dI}{dt} = I \cdot a \text{ , beziehungsweise}$$

$$\frac{dI}{I} = a\, dt \text{ ,}$$

mit der (einfachsten) Lösung

$$I(t) = e^{\int a dt}$$

$\underline{e^{\int a dt}}$ ist somit <u>integrierender Faktor</u>.

Wir lösen nun die Gleichung

$$\underbrace{e^{\int a dt}}_{M} dy + \underbrace{e^{\int a dt}\,(ay-b)}_{N} dt = 0$$

<u>1. Schritt:</u>

$$F(y,t) = \int e^{\int a dt} dy + \psi(t) = y\, e^{\int a dt} + \psi(t)$$

$e^{\int a dt}$ *nur von t abhängig*

<u>2. Schritt:</u> Nach der Kettenregel ist

$$\frac{\partial F}{\partial t} = ya\, e^{\int a dt} + \psi'(t) = N = e^{\int a dt}\,(ay-b)$$

$$\Rightarrow \quad \psi'(t) = -b\, e^{\int a dt} \quad \text{und}$$

$$\psi(t) = -\int b\, e^{\int a dt}\, dt$$

<u>3. Schritt:</u> Die Lösung der exakten Differentialgleichung lässt sich somit darstellen als

$$F(y,t) = y\, e^{\int a dt} - \int b\, e^{\int a dt}\, dt = A = \text{konstant}$$

<u>4. Schritt:</u> Lösen wir nach y(t) auf, so finden wir die auf S.19 bereits angegebene allgemeine Lösung der linearen Differentialgleichung 1. Ordnung

$$\underline{y(t) = e^{-\int a(t) dt}\left(A + \int b(t)\, e^{\int a(t) dt}\, dt\right)}$$

<u>Beispiel 1:</u>

Gesucht ist die Lösung der Differentialgleichung

$$y'(t) + \underbrace{e^{t}}_{a} y = \underbrace{e^{-e^{t}}}_{b}$$

$$\int a\, dt = \int e^{t} dt = e^{t}$$

$$\int b\, e^{\int a dt} dt = \int \underbrace{e^{-e^{t}} \cdot e^{e^{t}}}_{1} dt = t$$

Lösung:

$$\underline{y(t) = e^{-e^{t}}(A+t)}$$

<u>Beispiel 2:</u>

$$y' + \frac{y}{t} = 1$$

$$\int a\, dt = \int \frac{1}{t} dt = \ln t \;\; ; \quad e^{-\int a dt} = \frac{1}{t}$$

$$\int b e^{\int a dt}\, dt = \int t\, dt = t^{2}/2$$

Lösung:

$$\underline{y(t)} = \frac{1}{t}\left(A+t^2/2\right) = \underline{\frac{A}{t}+\frac{t}{2}}$$

Kontrolle:

$$y' = -\frac{A}{t^2}+\frac{1}{2}$$

$$y'+\frac{y}{t} = -\frac{A}{t^2}+\frac{1}{2}+\frac{A}{t^2}+\frac{1}{2} = 1$$

Separierbare Variablen

Ein speziell einfacher Fall von exakten Differentialgleichungen ergibt sich, wenn M eine Funktion von y alleine und N eine Funktion von t alleine ist, d.h.

$$\underline{f(y)\,dy + g(t)\,dt = 0}$$

In diesem Fall sagt man, die Variablen seien separierbar; die Differentialgleichung ist dann durch eine einfache Integration lösbar, wie die folgenden Beispiele illustrieren sollen.

Beispiel 1:

$$4y^3\,dy - 2t\,dt = 0$$

$$\int 4y^3\,dy = \int 2t\,dt$$

$$y^4 = t^2 + c$$

$$\underline{y(t) = (t^2+c)^{1/4}}$$

Beispiel 2: $y' + y \cdot \sin t = 0$

Auch hier sind die Variablen separierbar:

$$\frac{dy}{dt} = -\sin t \cdot y$$

$$\frac{dy}{y} = -\sin t\,dt \quad / \quad \textit{integrieren}$$

$$\int \frac{dy}{y} = \underline{\ln y} = -\int \sin t\,dt = \underline{\cos t + c}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{y(t)} = e^{\cos t} \cdot e^{c} = \underline{A\,e^{\cos t}}$$

Anwendung:

Ein makro-ökonomisches Modell postuliert die folgenden Zusammenhänge zwischen Volkseinkommen Y(t), Konsum C(t), Investition I(t) und Staatsausgaben G(t).

(i) $Y(t) = C(t) + I(t) + G(t)$ Definitionsgleichung

(ii) $C(t) = a\,Y(t)\ ,\ 0<a<1$

(iii) $I(t) = b\,Y'(t)\ ,\ b > 0$

(iv) $G(t) = G_0 \cdot e^{\lambda t}$

(ii)–(iv): Verhaltensgleichungen

Durch Einsetzen von (ii), (iii) und (iv) in (i) findet man die Differentialgleichung für Y(t):

$$Y'(t) \underbrace{-\frac{1-a}{b}}_{a(t)\ konst} Y(t) = \underbrace{-\frac{G_0}{b}\,e^{\lambda t}}_{b(t)}$$

Mit Hilfe der Lösungsformel S. 19 finden wir:

$$\int a(t)\,dt = -\frac{1-a}{b}\cdot t$$

$$\int b(t)\cdot e^{\int a(t)dt} = \int -\frac{G_0}{b}e^{\lambda t}\cdot e^{-\frac{1-a}{b}t}\,dt$$

$$= -\frac{G_0}{b}\cdot\frac{1}{\lambda-\frac{1-a}{b}}\,e^{\left(\lambda-\frac{1-a}{b}\right)t}$$

$$Y(t) = e^{\frac{1-a}{b}t}\left(A - \frac{G_0}{\lambda b-(1-a)}\,e^{\left(\lambda-\frac{1-a}{b}\right)t}\right)$$

Bestimmung von A:

$$Y(0) = Y_0 = A - \frac{G_0}{\lambda b-(1-a)}$$

$$A = Y_0 + \frac{G_0}{\lambda b-(1-a)}$$

Lösung:

$$Y(t) = e^{\frac{1-a}{b}t}\left(Y_0+\frac{G_0}{\lambda b-(1-a)}\left(1 - e^{\left(\lambda-\frac{1-a}{b}\right)t}\right)\right)$$

5. QUALITATIV - GRAPHISCHE METHODE

Wie in den vorangehenden Kapiteln gezeigt wurde, lassen sich viele Differentialgleichungen (1. Ordnung) quantitativ lösen, d.h. es lässt sich eine Lösungsfunktion y(t) exakt formelmässig angeben.

Andere Differentialgleichungen sind nicht in geschlossener Form lösbar.

Dennoch lassen sich gewisse qualitative Aussagen über das Lösungsverhalten direkt aus der Differentialgleichung ableiten.

Das Hilfsmittel dazu ist das sogenannte Phasendiagramm.

Wir betrachten eine Differentialgleichung der Form

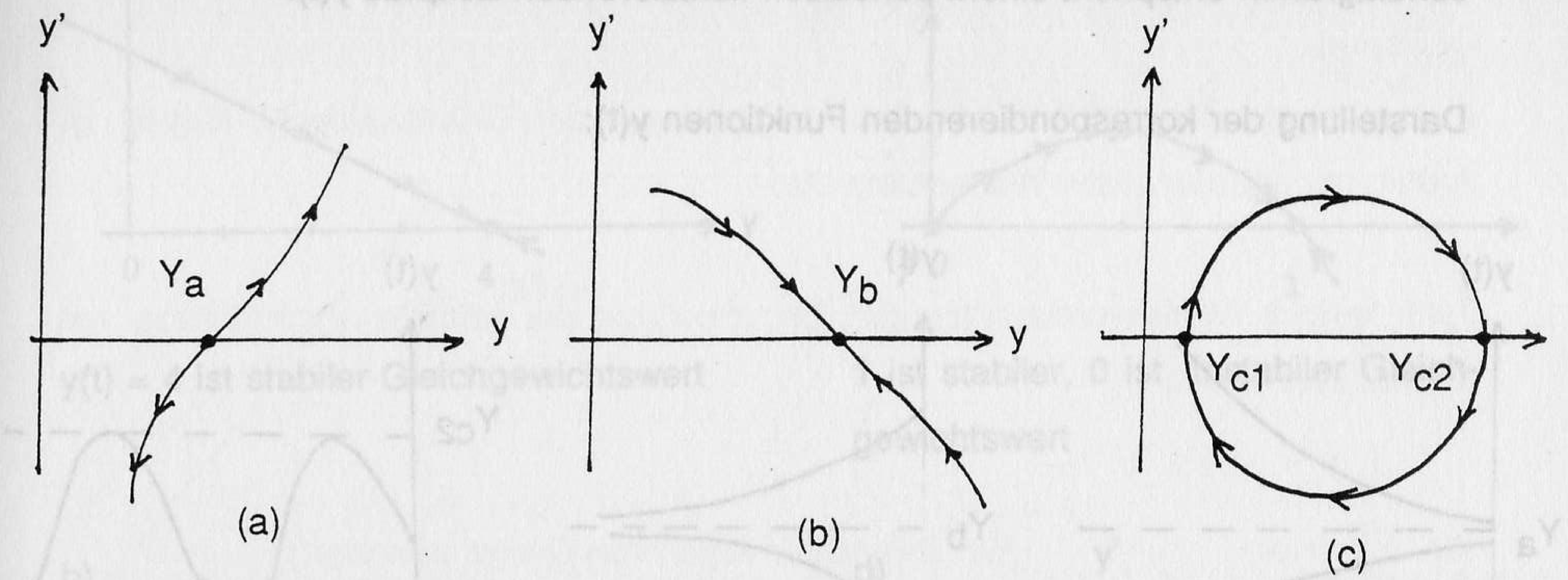
$$y'(t) = f\,(y\,(t))\,,$$

eine sogenannte autonome Differentialgleichung. (Die Zeitvariable t tritt nicht als separates Argument der Funktion auf.)

Wir tragen in einem Koordinatensystem y in horizontaler, y' in vertikaler Richtung ab.

Den resultierenden Graphen nennt man Phasendiagramm.

Beispiele:



Allgemeine Bemerkungen zur Erläuterung:

(1) Oberhalb der horizontalen Achse ist $\frac{dy}{dt} > 0$, d.h. y(t) nimmt zu. Die **Bewe-**

gungsrichtung längs dem Pfad ist oberhalb der y-Achse stets von links nach rechts.

Unterhalb der y-Achse ist $\frac{dy}{dt} < 0$, y nimmt ab; die Bewegung verläuft von rechts nach links. Dies ist durch die Pfeilrichtungen auf dem Pfad im Phasenraum dargestellt.

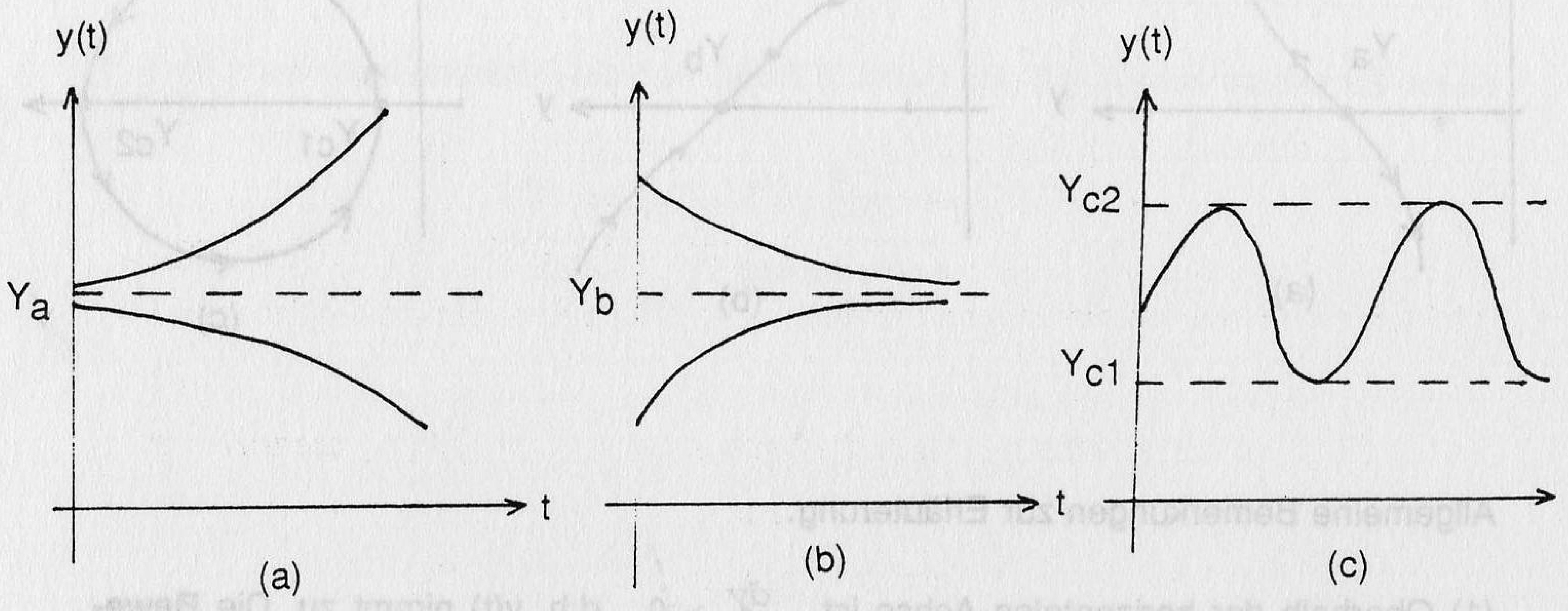
(2) Schnittpunkte mit der horizontalen Achse $\left(\frac{dy}{dt} = 0\right)$ stellen (zeitliche) Gleichgewichte von y dar, also stationäre Werte.

Schneidet das Phasendiagramm die horizontale Achse mit negativer Steigung, so ist das entsprechende Gleichgewicht stabil (Fall (b)); eine positive Steigung im Schnittpunkt bedeutet dynamische Instabilität.

(3) Nicht alle Schnittpunkte des Phasendiagrammes mit der horizontalen Achse stellen Gleichgewichte von y dar.

In der Graphik (c) ist eine geschlossene Kurve, also eine Relation (keine Funktion) zwischen y' und y dargestellt, welche die y-Achse senkrecht schneidet. Dieses Phasendiagramm entspricht einem periodisch fluktuierenden Zeitpfad y(t).

Darstellung der korrespondierenden Funktionen y(t):



Aufgaben:

1. Überlegen Sie sich, wie das Phasendiagramm einer
   - ungedämpften
   - einer gedämpften Pendelbewegung

ausschaut, wenn y den Ausschlagswinkel und y' die Winkelgeschwindigkeit bezeichnet.

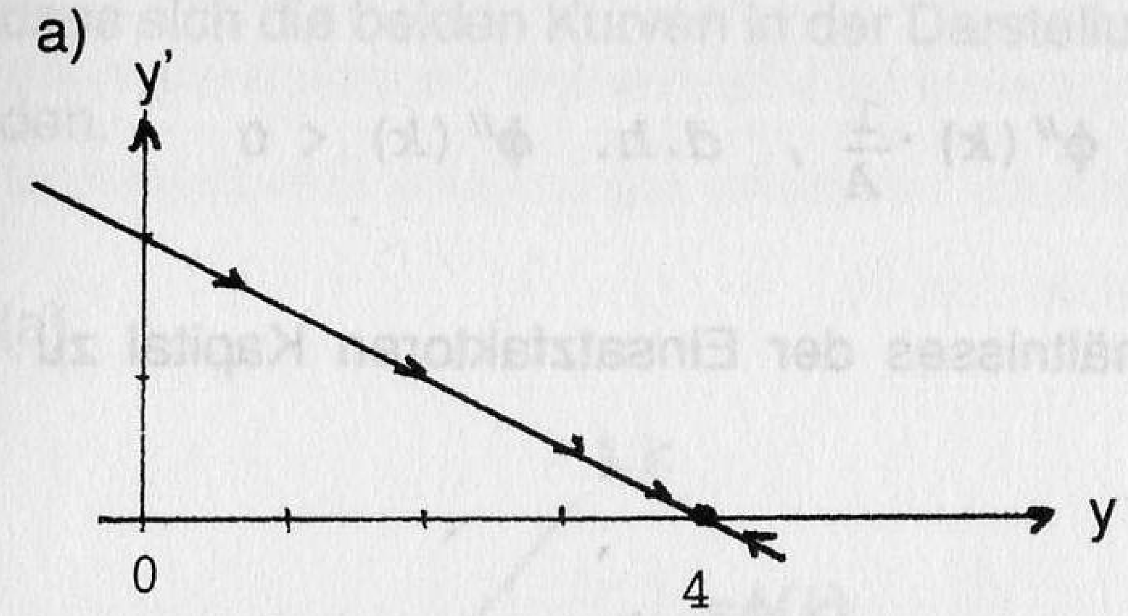
2. Für jede der folgenden Differentialgleichungen stelle man das Phasendiagramm dar und diskutiere seine qualitativen Implikationen

a) $\frac{dy}{dt} = 2 - \frac{y}{2}$ c) $\frac{dy}{dt} = y - y^2$

b) $\frac{dy}{dt} = \frac{y}{3} - 1$ d) $(y')^2 + y^2 = 1$

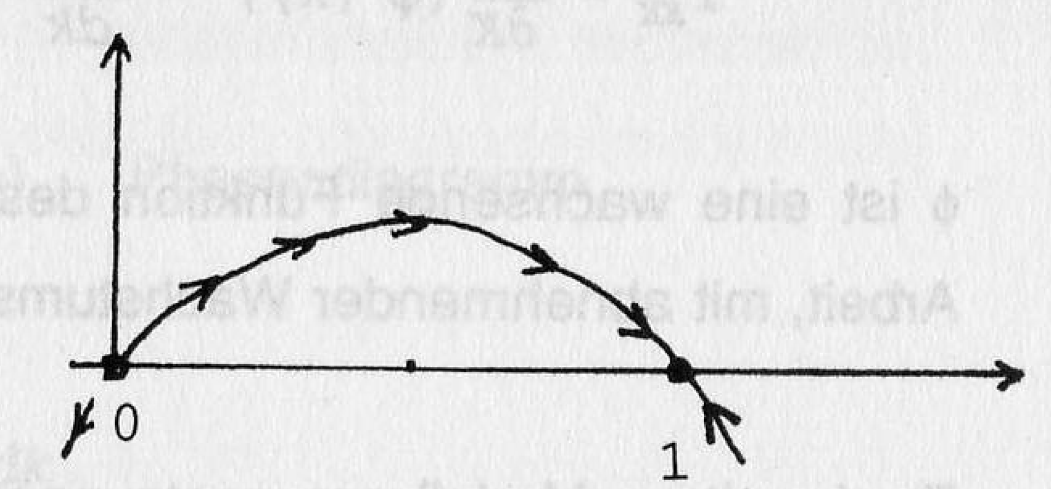
Lösungen:

a)



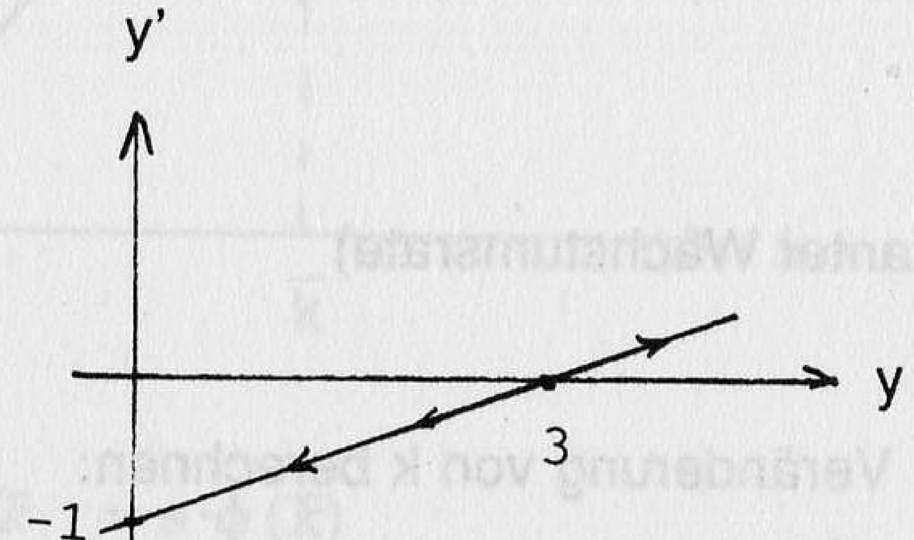
y(t) = 4 ist stabiler Gleichgewichtswert

c)

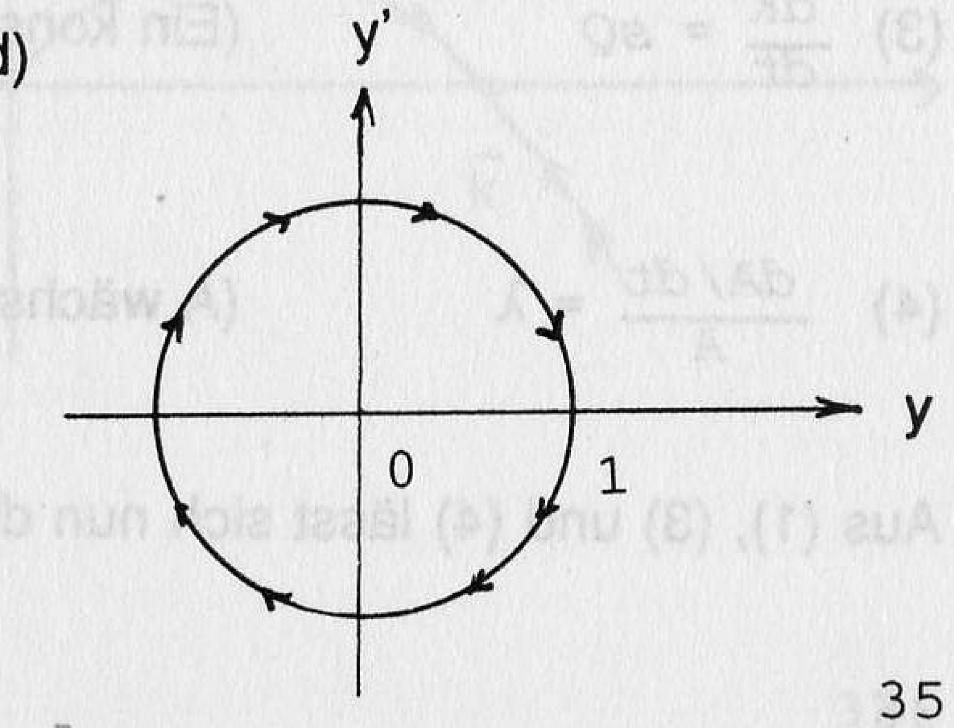


1 ist stabiler, 0 ist instabiler Gleichgewichtswert

b)



d)



Anwendung: Qualitativ-graphische Analyse des Wachstumsmodelles von Solow

Während das Domar - Modell (siehe auch Band 1, S. 246) nur einen Produktionsfaktor, das Kapital, betrachtet, bezieht Solow explizit auch die Arbeit in die Analyse ein (alles im Makro-ökonomischen Sinn).

Seine Modellvoraussetzungen sind:

(1) Die Produktionsfunktion Q = f (K, A) ist linear-homogen, d.h.

$$Q = A \cdot f\left(\frac{K}{A}\,,\ 1\right) = A \cdot \phi(k) \quad \text{, wobei} \quad k = \frac{K}{A}$$

(2) $f_K > 0$, $f_A > 0$ (positive Grenzerträge) und $f_{KK} < 0$, $f_{AA} < 0$ (abnehmende Grenzerträge).

Diese Voraussetzungen lassen für die Funktion ϕ folgern:

Es ist

$$f_K = A \cdot \frac{d\phi}{dk} \cdot \frac{\partial k}{\partial K} = A \cdot \phi'(k)\,\frac{1}{A} \qquad d.h.\ \phi'(k) > 0$$

$$f_{KK} = \frac{\partial}{\partial K}\,(\phi'(k)) = \frac{d\phi'}{dk} \cdot \frac{\partial k}{\partial K} = \phi''(k) \cdot \frac{1}{A}\,, \quad d.h. \quad \phi''(k) < 0$$

ϕ ist eine wachsende Funktion des Verhältnisses der Einsatzfaktoren Kapital zu Arbeit, mit abnehmender Wachstumsrate.

Zwei weitere Modellvoraussetzungen betreffen nun die zeitliche Veränderung von Kapital und Arbeit:

(3) $\frac{dK}{dt} = sQ$ (Ein konstanter Anteil von Q wird investiert)

(4) $\frac{dA/dt}{A} = \lambda$ (A wächst mit konstanter Wachstumsrate)

Aus (1), (3) und (4) lässt sich nun die zeitliche Veränderung von k berechnen:

$$\frac{dk}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{K}{A}\right) = \frac{1}{A} \cdot \frac{dK}{dt} - \frac{K}{A^2} \cdot \frac{dA}{dt}$$

(Quotientenregel)

$$= \frac{1}{A}\,sQ - \frac{1}{A} \cdot \frac{K}{A} \cdot A \cdot \lambda = \frac{1}{A} \cdot s \cdot A\phi(k) - k\lambda$$

$$\boxed{\frac{dk}{dt} = s \cdot \phi(k) - k \cdot \lambda}$$

Diese Gleichung, eine Differentialgleichung für k mit den Parametern s und λ, ist die fundamentale Gleichung des Solow-Wachstumsmodells.

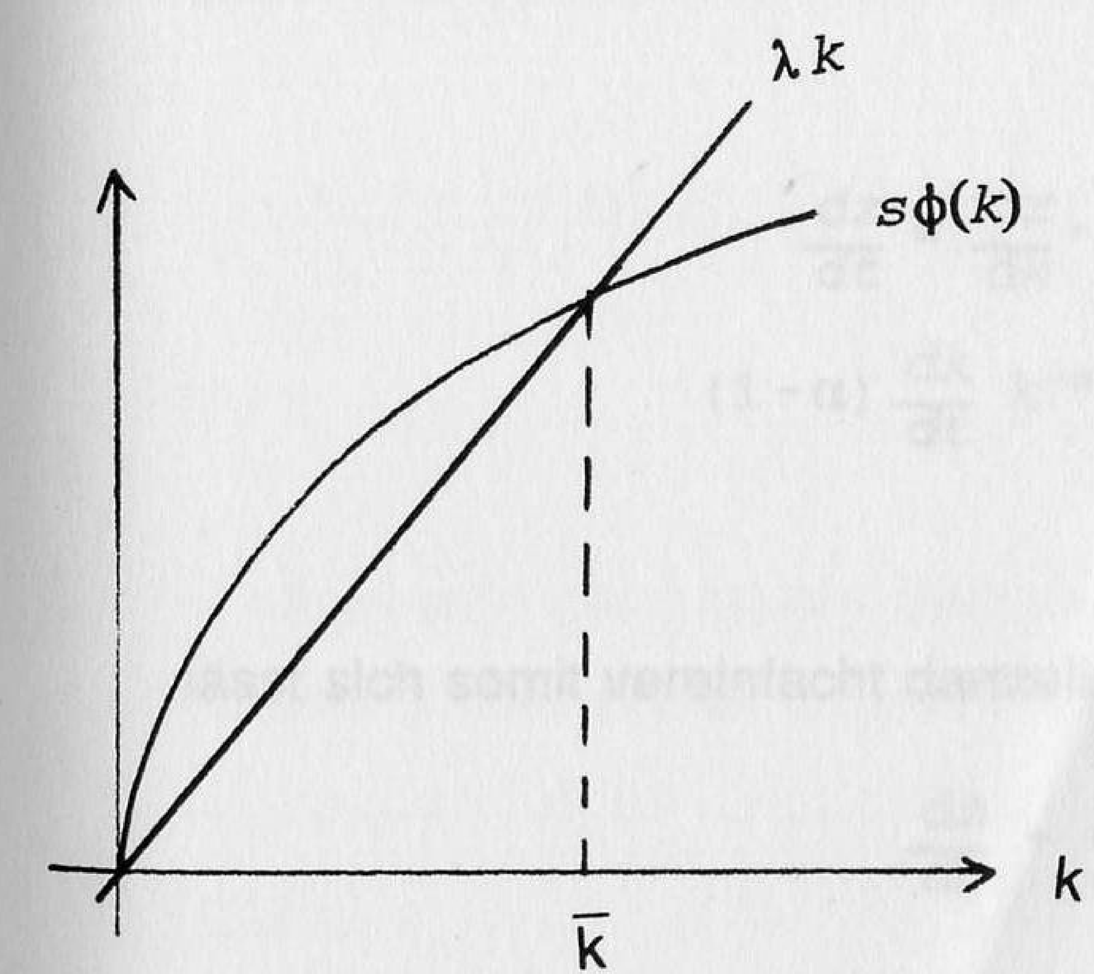
Solange ϕ nicht explizit konkretisiert wird, lässt sich die Gleichung nicht lösen; dennoch kann sie mit graphischen Methoden untersucht werden.

Aus (2) wissen wir: $\phi(k)$ und somit auch $s \cdot \phi(k)$ ist monoton wachsend und konkav.

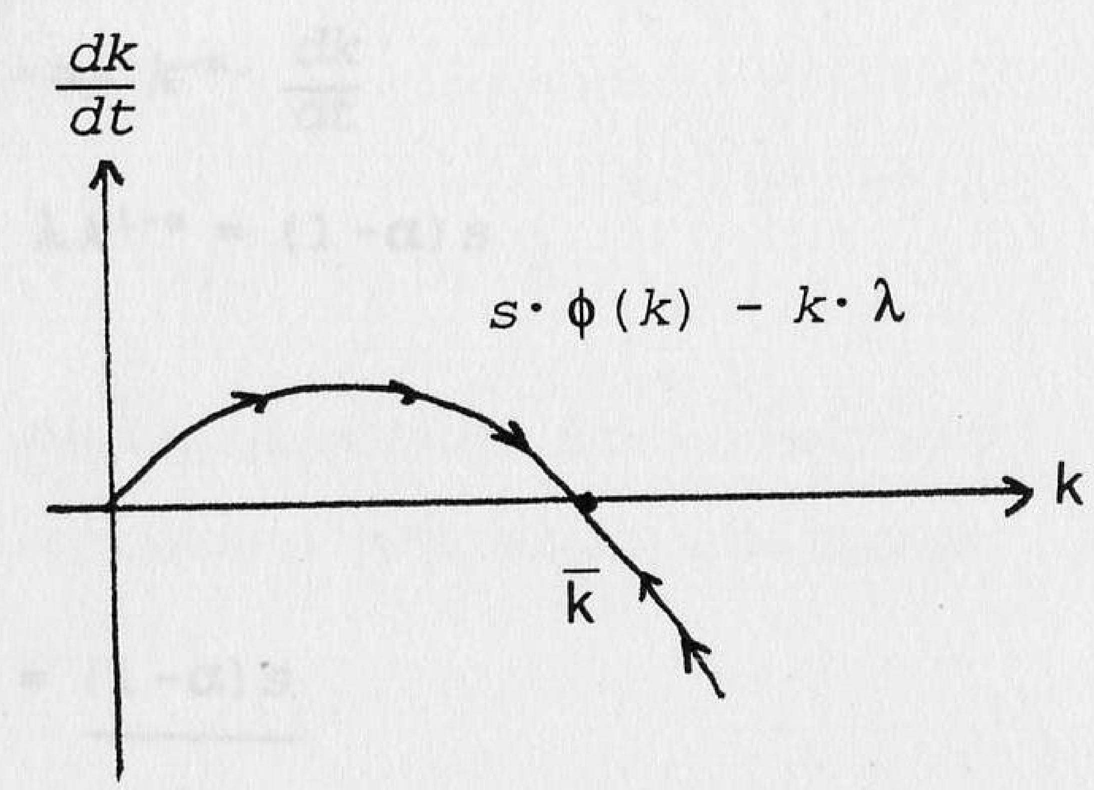
Ferner ist es vernünftig anzunehmen, dass $\phi(0) = 0$.

Wir setzen ebenfalls voraus, dass $s \cdot \phi(k)$ grösser ist als λk für gewisse Werte k, so dass sich die beiden Kurven in der Darstellung (a) an einer positiven Stelle $\overline{k}$ schneiden.

(a)



(b) Phasendiagramm



$$\lambda \cdot \overline{k} = s \cdot \phi(\overline{k})$$

An der Stelle $k = \bar{k}$ ist $\frac{dk}{dt} = 0$, d.h. $\bar{k}$ stellt einen <u>zeitlichen Gleichgewichtswert</u>

des Verhältnisses $\frac{K}{A}$ dar.

Für $k < \bar{k}$ ist $\frac{dk}{dt}$ positiv, d.h. k wachsend.

Für $k > \bar{k}$ ist $\frac{dk}{dt}$ negativ, d.h. k fallend.

Der Gleichgewichtswert von $\bar{k}$ ist somit stabil.

Ist $\frac{K}{A} = \bar{k}$ einmal erreicht, so müssen K und A mit gleicher Wachstumsrate λ wachsen. Da $Q = A \cdot \phi(k)$ für $k = \bar{k}$ sich reduziert zu

$Q = A \cdot$ konstant, wächst auch Q mit derselben Wachstumsrate λ .

Man spricht von einem steady-state Gleichgewicht (alle relevanten Variablen wachsen mit derselben Wachstumsrate), im Gegensatz zu einem stationären Gleichgewicht (die Wachstumsrate aller relevanten Variablen ist 0).

Wir wollen die qualitativen Überlegungen im folgenden durch quantitative Überlegungen ergänzen, indem wir für Q = f (K, A) speziell eine <u>Cobb-Douglas-Produktionsfunktion</u> wählen:

$$Q = K^{\alpha} A^{1-\alpha} = A\left(\frac{K}{A}\right)^{\alpha} , \quad 0 < \alpha < 1$$

$$Q = A\phi(k) , \quad mit\ \phi(k) = k^{\alpha} , \quad 0 < \alpha < 1 , \quad k = \frac{K}{A}$$

Die Differentialgleichung des Wachstumsmodells lautet damit

$$\frac{dk}{dt} = sk^{\alpha} - \lambda k \quad bzw. \quad \frac{dk}{dt} + \lambda k = sk^{\alpha}$$

Wir versuchen, diese Gleichung durch eine geschickte Substitution in eine lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten und konstanter rechter Seite zu verwandeln.

Dazu dividieren wir zunächst durch k^{α}.

$$\frac{dk}{dt} \cdot k^{-\alpha} + \lambda\ k^{1-\alpha} = s$$

Substitution: $z = k^{1-\alpha}$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dz}{dk} \cdot \frac{dk}{dt} = (1-\alpha)\ k^{-\alpha} \cdot \frac{dk}{dt}$$

$$(1-\alpha)\frac{dk}{dt}\ k^{-\alpha} + (1-\alpha)\ \lambda k^{1-\alpha} = (1-\alpha)s$$

lässt sich somit vereinfacht darstellen als

$$\frac{dz}{dt} + \underbrace{(1-\alpha)\lambda}_{a} z = \underbrace{(1-\alpha)s}_{b}$$

Lösung: (vgl. S. 14)

$$z(t) = \left(z_0 - \frac{s}{\lambda}\right) e^{-(1-\alpha)\lambda t} + \frac{s}{\lambda}$$

Für $t \to \infty$ strebt $z(t) \to \frac{s}{\lambda}$

und somit

$$k(t) \to \left(\frac{s}{\lambda}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

Das "steady state" Gleichgewichts-Verhältnis hängt offenbar von der Grenzneigung zum Sparen s und der Wachstumsrate λ des Einsatzfaktors Arbeit ab.

6. LINEARE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN 2. ORDNUNG MIT KONSTANTEN KOEFFIZIENTEN

$$\text{(H)} \qquad y'' + a_1 y' + a_2 y = 0 , \quad a_1, \ a_2 \in \mathbb{R}$$

heisst **homogene** lineare Differentialgleichung 2. Ordnung.

$$\text{(I)} \qquad y'' + a_1 y' + a_2 y = b(t) , \quad a_1, \ a_2 \in \mathbb{R}$$

heisst **inhomogene** lineare Differentialgleichung 2. Ordnung.

Aufbau der Lösung

1. Wegen der Linearität der Gleichung lässt sich die allgemeine Lösung von (H) als Linearkombination zweier linear unabhängiger Lösungen von (H) aufbauen. Sie ist daher eine zwei-parametrige Lösungsschar.
2. Die allgemeine Lösung von (I) ist gleich der Summe der allgemeinen Lösung von (H) und einer beliebigen - möglichst einfachen - Partikulärlösung von (I).
3. Anfangswertproblem: Anfangsbedingungen, d.h. vorgegebene Werte für y(0) und y'(0), lassen die Bestimmung der Parameter zu. Damit ist die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems gefunden.

Lösung der homogenen Differentialgleichung

$$\text{(H)} \qquad y'' + a_1 y' + a_2 y = 0 , \quad a_1, \ a_2 \in \mathbb{R}$$

In Anbetracht der grossen Bedeutung von Exponentialfunktionen beim Lösen von linearen Differentialgleichungen 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten, untersuchen wir, ob auch hier ein Exponentialansatz zum Ziel führt.

Ansatz:	$y(t) =$	e^{rt}
Dann ist	$y'(t) =$	$r\,e^{rt}$
	$y''(t) =$	$r^2\,e^{rt}$

Einsetzen in (H) ergibt

$$r^2 e^{rt} + a_1 r e^{rt} + a_2 e^{rt} = e^{rt}(r^2 + a_1 r + a_2) = 0$$

Da $e^{rt} > 0$ für alle t erhalten wir somit als Bedingung die <u>charakteristische Gleichung</u> der Differentialgleichung (H):

$$\underline{r^2 + a_1 r + a_2 = 0}$$

Diese besitzt die Lösungen $\quad r_{1,2} = \dfrac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2}$

r_1 und r_2 können - reell und verschieden
- reell und gleich, $r_1 = r_2$
- konjugiert komplex

sein, je nachdem, ob $\quad a_1^2 \; 4a_2 \begin{matrix} > 0 \\ 0 \\ < 0 \end{matrix}$

Wir untersuchen diese drei Fälle:

<u>1. Fall</u>: **a_1^2-4a_2 > 0** : r_1 und r_2 sind reell und voneinander verschieden. Somit sind

$$y_1(t) = e^{r_1 t} \quad und \quad y_2(t) = e^{r_2 t}$$

linear unabhängige Lösungen von (H), und

$$\underline{y(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

ist die **allgemeine Lösung von (H)**.

<u>Beispiel</u>:

a) Gesucht ist die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y'' + 2y' - 8y = 0$$

b) Welche dieser Lösungen erfüllt die Anfangsbedingungen y(0) = 3, y'(0) = 0 ?

Der Ansatz $y(t) = e^{rt}$ führt auf die charakteristische Gleichung

$$r^2 + 2r - 8 = 0 \quad oder \quad (r + 4)(r - 2) = 0$$

mit den Lösungen: $r_1 = -4$, $r_2 = 2$.

Als allgemeine Lösung erhalten wir: $\quad y(t) = c_1 e^{-4t} + c_2 e^{2t}$.

Wir verwenden nun die Anfangsbedingungen aus b):

$$\begin{aligned} y(0) &= c_1 e^0 + c_2 e^0 = c_1 + c_2 = 3 \\ y'(0) &= -4c_1 e^0 + 2c_2 e^0 = -4c_1 + 2c_2 = 0 \end{aligned}$$

Dieses lineare Gleichungssystem besitzt die Lösungen $c_1 = 1$, $c_2 = 2$.

Daraus ergibt sich die Lösung unseres Anfangswertproblems:

$$\underline{y(t) = e^{-4t} + 2e^{2t}}$$

<u>2. Fall</u>: **a_1^2-4a_2 = 0** : $r_1 = r_2 = r = -a_1 / 2$, und $y(t) = e^{rt}$ ist <u>eine</u> Lösung von (H).

Wir suchen eine zweite, davon linear unabhängige, Lösung.

Versuch: Ist $y(t) = te^{rt}$ ebenfalls eine Lösung von (H) ?

$$\begin{aligned} y(t) &= te^{rt} \\ y'(t) &= e^{rt} + rte^{rt} = (1 + rt)e^{rt} \\ y''(t) &= re^{rt} + re^{rt} + r^2 te^{rt} = r(2 + rt)e^{rt} \end{aligned}$$

Wir setzen diese Terme in die Gleichung (H) ein und finden

$$r(2 + rt)e^{rt} + a_1(1 + rt)e^{rt} + a_2 te^{rt} =$$
$$e^{rt}\left[(2r + a_1) + t(r^2 + a_1 r + a_2)\right] = 0$$

Der Ausdruck verschwindet, da r einerseits Lösung der charakteristischen Gleichung $r^2 + a_1 r + a_2 = 0$ ist, sowie andererseits mit $r = -a_1 / 2$ (als Doppellösung der charakteristischen Gleichung) auch $2r + a_1 = 0$ ist.

Mit $y(t) = te^{rt}$ haben wir eine zweite Lösung von (H) gefunden. Die allgemeine Lösung ergibt sich als Linearkombination davon, wobei c_1 und c_2 beliebige Konstanten sind:

$$\underline{y(t) = c_1 e^{rt} + c_2 te^{rt} = (c_1 + c_2 t)e^{rt}}$$

<u>Beispiel</u>: Gesucht ist die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y'' + 6y' + 9y = 0$$

Charakteristische Gleichung:

$$r^2 + 6r + 9 = (r + 3)^2 = 0 \qquad \underline{r = -3}$$

Allgemeine Lösung:

$$\underline{y(t) = (c_1 + c_2 t)e^{-3t}}$$

<u>3. Fall</u>: $\mathbf{a_1^2 - 4a_2 < 0}$: r_1 und r_2 sind konjugiert komplex (für die Theorie der komplexen Zahlen siehe Anhang, S. 148 ff.):

$$r_{1,2} = -\frac{a_1}{2} \pm i\frac{\sqrt{4a_2 - a_1^2}}{2} = u \pm iv$$

Kann die Lösungsformel

$$y(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{C}$$

auch in diesem Fall sinnvoll interpretiert werden?

Gemäss der Euler'schen Relation (s. Anhang, S. 160) ist

$$c_1 e^{ut}e^{ivt} + c_2 e^{ut}e^{-ivt}$$
$$= e^{ut}(c_1(\cos vt + i\sin vt) + c_2(\cos vt - i\sin vt))$$
$$= e^{ut}((c_1 + c_2)\cos vt + (c_1 - c_2)i\sin vt)$$

Im Hinblick auf die Anwendungen sind wir nur an <u>reellen</u> Lösungen interessiert. Wir wählen $c_1 = \alpha + i\beta$ und $c_2 = \alpha - i\beta$. Dann ist $c_1 + c_2 = 2\alpha = a$ und $i(c_1 - c_2) = -2\beta = b$ und wir erhalten die zwei-parametrige Lösungsschar

$$\underline{y(t) = e^{ut}(a\cos vt + b\sin vt)}$$

als allgemeine Lösung von (H).

<u>Beispiel 1</u>:

$$y'' + y = 0$$

Charakteristische Gleichung:

$$r^2 + 1 = 0 \qquad r_{1,2} = \pm i$$
$$u = 0 \qquad v = 1$$

Lösung:

$$y(t) = a\cos t + b\sin t$$

Kontrolle:

$$y' = -a\sin t + b\cos t$$
$$y'' = -a\cos t - b\sin t$$

$$\Rightarrow \quad y + y'' = 0$$

Beispiel 2: Gesucht ist diejenige Lösung der Differentialgleichung $y'' - 2y' + 10y = 0$ welche die Anfangsbedingungen $y(0) = 10$ und $y'(0) = 1$ erfüllt.

(i) allgemeine Lösung:

charakteristische Gleichung: $r^2 - 2r + 10 = 0$

$$r_{1,2} = \frac{+2 \pm \sqrt{4-40}}{2} = 1 \pm 3i, \qquad u = 1 \qquad v = 3$$

$$y(t) = e^t(a\cos 3t + b\sin 3t), \qquad a, b \in \mathbb{R}$$

(ii) $y(0) = e^0(a \cos 0 + b \sin 0) = 1\,(a \cdot 1 + b \cdot 0) = a = 10$

$y'(t) = e^t(a \cos 3t + b \sin 3t) + e^t(-3a \sin 3t + 3b \cos 3t)$

$\quad = e^t\,[(a+3b) \cos 3t + (b-3a) \sin 3t]$

$y'(0) = a + 3b = 1 \Rightarrow b = -3$

Lösung:

$y(t) = e^t\,(10 \cos 3t - 3 \sin 3t)$

Zusammenstellung:

Differentialgleichung (H) : $y'' + a_1y' + a_2y = 0$

Charakteristische Gleichung: $r^2 + a_1r + a_2 = 0$

Lösungen: $r_{1,2} = \dfrac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2}$

Für die allgemeine Lösung von (H) erhalten wir drei Fälle:

1.	$a_1^2 - 4a_2 > 0$	$r_1 \neq r_2$ reell	$y(t) = c_1e^{r_1t} + c_2e^{r_2t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$
2.	$a_1^2 - 4a_2 = 0$	$r_1 = r_2 = r$ reell	$y(t) = (c_1 + c_2t)e^{rt}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$
3.	$a_1^2 - 4a_2 < 0$	$r_{1,2} = u \pm iv$	$y(t) = e^{ut}(a\cos vt + b\sin vt), \; a, b \in \mathbb{R}$

Stabilität der Lösung:

Was lässt sich über das Langzeitverhalten der Lösung aussagen ? Für die Exponentialfunktion gilt

$e^{rt} \longrightarrow \infty$ für $t \to \infty$, falls $r > 0$

e^{rt} und $te^{rt} \longrightarrow 0$ für $t \to \infty$, falls $r < 0$

Somit gilt

$y(t) \longrightarrow 0$ für $t \to \infty$, falls
- r_1, r_2 negativ (1. Fall)
- r negativ (2. Fall)
- u negativ (3. Fall)

d.h. $y(t) \longrightarrow 0$ für $t \to \infty$, falls $\mathrm{Re}(r_{1,2}) < 0$. Dies ist aber genau dann der Fall, wenn $a_1 > 0$ und $a_2 > 0$.

Anwendung: Das Richardson'sche Wettrüstungsmodell

L. F. Richardson (1948) war der Meinung, internationale militärische Auseinandersetzungen würden durch gegenseitiges Aufschaukeln der Furcht verursacht. Er versuchte, den Prozess des Aufrüstens durch ein System von Differentialgleichungen darzustellen.

Es bezeichne $x(t)$ bzw. $y(t)$ das Rüstungsniveau zweier feindlicher Länder, $x'(t)$ bzw. $y'(t)$ das Anwachsen des Rüstungsniveaus.

Grundmodell:

(1) $x'(t) = a\,y(t) \quad (a > 0)$

(2) $y'(t) = b\,x(t) \quad (b > 0)$

Die Veränderung des Rüstungsniveaus ist proportional zum Rüstungsniveau des Gegners.

(Bemerkung: Richardson betrachtete auch eine <u>Variante</u> des Grundmodells:

(1) $x'(t) = a\,y(t) - m\,x(t) + g \qquad (a, m, g > 0)$

(2) $y'(t) = b\,x(t) - n\,y(t) + h \qquad (b, n, h > 0)$

Diese werden wir hier nicht untersuchen.)

Aus (1) folgt:

$$x''(t) = a\,y'(t)$$

Eingesetzt in (2) finden wir:

$$x''(t) = a\,b\,x(t) \quad \text{bzw.} \quad x''(t) - a\,b\,x(t) = 0$$

Charakteristische Gleichung:

$$r^2 - a\,b = 0$$

$$r_{1,2} = \pm\sqrt{ab} \qquad r_1,\ r_2 \ \text{reell, verschieden}$$

$$x(t) = c_1 e^{\sqrt{ab}\,t} + c_2 e^{-\sqrt{ab}\,t}$$

Verwenden wir zur Bestimmung von c_1 und c_2 die Anfangsbedingungen

$x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$, $x_0, y_0 > 0$, so finden wir

$$\rightarrow \quad c_1 = \frac{1}{2}\left(x_0 + \sqrt{\frac{a}{b}}\,y_0\right)$$

$$c_2 = \frac{1}{2}\left(x_0 - \sqrt{\frac{a}{b}}\,y_0\right)$$

$$x(t) = \left(\frac{1}{2}x_0 + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{b}}\,y_0\right)e^{\sqrt{ab}\,t} + \left(\frac{1}{2}x_0 - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{b}}\,y_0\right)e^{-\sqrt{ab}\,t}$$

$$y(t) = \left(\frac{1}{2}y_0 + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{b}{a}}\,x_0\right)e^{\sqrt{ab}\,t} + \left(\frac{1}{2}y_0 - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{b}{a}}\,x_0\right)e^{-\sqrt{ab}\,t}$$

Für $t \to \infty$ finden wir $x(t) \to \infty$ und $y(t) \to \infty$, d.h. $x(t)$ und $y(t)$ wachsen über alle Grenzen.

<u>Partikulärlösung der inhomogenen Gleichung</u>

(1) Konstante rechte Seite: $y'' + a_1 y' + a_2 y = b$

Der <u>Ansatz</u> $y^*(t) = c = \text{konstant}$ ergibt $(y^*)' = (y^*)'' = 0$,

d.h. $a_2 y^*(t) = b$, und wir erhalten für $a_2 \neq 0$ die Lösung

$$\underline{y^* = \frac{b}{a_2}}$$

Ist $a_2 = 0$, so führt der <u>Ansatz</u> $y^*(t) = ct$ auf die Gleichung $a_1 c = b$, d.h. $c = b/a_1$, mit der Lösung

$$\underline{y^*(t) = \frac{b}{a_1}t, \qquad a_1 \neq 0}$$

(Sind $a_1 = a_2 = 0$, so ist die Gleichung $y'' = b$ direkt integrierbar:

$$y' = bt + c$$
$$y = \frac{b}{2}t^2 + ct + d$$

wobei c, d beliebig.)

(2) Variable rechte Seite: <u>Methode der unbestimmten Koeffizienten.</u>

Die Methode sei zuerst an drei Beispielen erläutert:

<u>Beispiel 1</u>: $y'' + 2y' - y = t^2 + 1$

Welcher Funktionstypus kann, zusammen mit seiner 1. und 2. Ableitung, die Funktion $b(t) = t^2 + 1$ erzeugen ?

Sicher muss es sich um eine quadratische Funktion handeln, der

Ansatz $y^*(t) = at^2 + bt + c$

ist gerechtfertigt. Wir berechnen $(y^*(t))'$ und $(y^*(t))''$, setzen ein und finden durch Koeffizientenvergleich a, b und c:

$(y^*(t))' = 2at + b$

$(y^*(t))'' = 2a$

$2a + 2(2at+b) - (at^2+bt+c) = t^2+1$

Wir sortieren nach Exponenten von t und erhalten für den Koeffizientenvergleich die folgenden Bedingungen:

$$\begin{aligned} 2a + 2b - c &= 1 \\ 4a - b &= 0 \\ -a &= 1 \end{aligned}$$

und somit <u>$a = -1,\ b = -4,\ c = -11$</u>.

Lösung: $y^*(t) = -t^2 - 4t - 11$

Kontrolle: $(y^*(t))' = -2t - 4$

$(y^*(t))'' = -2$

$$\begin{aligned} (y^*(t))'' + 2(y^*(t))' - y^*(t) &= -2 - 4t - 8 + t^2 + 4t + 11 \\ &= t^2 + 1 \end{aligned}$$

<u>Beispiel 2</u>: $y'' - y' + 3y = e^{3t}$

Der **Ansatz** $y^*(t) = ce^{3t}$ ergibt

$(y^*(t))' = 3ce^{3t}$

$(y^*(t))'' = 9ce^{3t}$

und somit eine Bestimmungsgleichung für c:

$e^{3t}(9c - 3c + 3c) = e^{3t} \quad \Rightarrow \quad c = 1/9$

$$\underline{y^*(t) = \frac{1}{9} e^{3t}}$$

<u>Beispiel 3</u>: $y'' - 2y' + 3y = \sin t$

Sukzessive Ableitungen von Sinus-Funktionen sind Cosinus- und Sinus-Funktionen.

Der **Ansatz** $y^*(t) = a \sin t + b \cos t$ ist gerechtfertigt.

$(y^*(t))' = a \cos t - b \sin t$

$(y^*(t))'' = -a \sin t - b \cos t$

Einsetzen ergibt:

$$\begin{aligned} -a \sin t - b \cos t - 2(a \cos t - b \sin t) + 3(a \sin t + b \cos t) &= \\ = \sin t\,(2a + 2b) + \cos t\,(-2a + 2b) & \\ = \sin t & \end{aligned}$$

Der Koeffizientenvergleich von sin t und cos t liefert die Bedingungen:

$$\begin{aligned} 2a + 2b &= 1 \\ -2a + 2b &= 0 \end{aligned}$$

mit den Lösungen $a = b = 1/4$.

Es ist möglich, dass der Ansatz $y^*(t)$ "analog" zur rechten Seite b(t) nicht zum Ziel führt; dies ist immer dann der Fall, wenn eine Funktion vom Typus b(t) bereits Lösung der zugehörigen <u>homogenen</u> Gleichung ist.

<u>Illustration</u>: (I) $y'' - 4y' + 3y = e^{3t}$

homogene Gleichung: (H) $y'' - 4y' + 3y = 0$

charakteristische Funktion: $r^2 - 4r + 3 = (r - 1)(r - 3) = 0$

$r_1 = 1 \qquad r_2 = 3$

allgemeine Lösung von (H): $y^{(H)}(t) = c_1 e^t + c_2 e^{3t}$

<u>Ansatz</u> für Partikulärlösung von (I): $y^*(t) = ce^{3t}$

$(y^*(t))' = 3ce^{3t}$

$(y^*(t))'' = 9ce^{3t}$

Einsetzen in (I) ergibt Widerspruch: $ce^{3t}(9 - 12 + 3) = 0 \neq e^{3t}$

<u>Revidierter Ansatz</u>: $y^*(t) = cte^{3t}$

$(y^*(t))' = ce^{3t} + 3cte^{3t} = (1 + 3t)\,ce^{3t}$

$(y^*(t))'' = (3 + 3(1 + 3t))\,ce^{3t} = (6 + 9t)\,ce^{3t}$

Einsetzen in (I): $ce^{3t}(6 + 9t - 4 - 12t + 3t) = e^{3t}$

$2c = 1 \Rightarrow c = 1/2$

<u>Lösung</u>: <u>$y(t) = c_1 e^t + c_2 e^{3t} + t/2\, e^{3t}$</u>

Tabelle der Ansätze für eine Partikulärlösung gemäss der Methode der unbestimmten Koeffizienten:

b(t)	Ansatz (1)	Ansatz (2), falls (1) die homogene Gleichung löst
b	$c = b / a_2 \qquad (a_2 \neq 0)$	ct
t	at + b	t^2 (at + b)
t^n bzw. $k_n t^n + \dots + k_2 t^2 + k_1 t + k_0$	$a_n t^n + \dots + a_2 t^2 + a_1 t + a_0$	
sin t oder cos t	a sin t + b cos t	t (a sin t + b cos t)
e^{rt}	ce^{rt}	cte^{rt}

Aufgaben: Gesucht ist eine Partikulärlösung der folgenden Differentialgleichungen.

1.) $y''(t) + 2y'(t) + y(t) = t$

2.) $y''(t) + 4y'(t) + y(t) = 2t^2$

3.) $y''(t) + y'(t) + 2y(t) = e^t$

4.) $y''(t) + y'(t) + 3y(t) = \sin t$

Lösungen:

1.) $y^*(t) = t - 2$

2.) $y^*(t) = 2t^2 - 16t + 60$

3.) $y^*(t) = \frac{1}{4} e^t$

4.) $y^*(t) = 0.4 \sin t - 0.2 \cos t$

<u>Anwendung:</u> Ein Marktmodell mit Preiserwartung

Käufer und Verkäufer basieren ihr Marktverhalten häufig nicht alleine auf dem momentanen Preis, sondern schliessen auch ihre **Erwartungen** über die Preisentwicklung ein. Bei stetigen Modellen ist die Information über die Preisentwicklung hauptsächlich in P'(t) (wachsender oder fallender Preis) und P"(t) (wachsende oder fallende Veränderungsraten) enthalten. Das folgende Modell will ein solches Verhalten abbilden:

(1) $Q_d = \alpha - \beta P + m P' + n P'' \quad (\alpha, \beta > 0)$

(2) $Q_s = -\gamma + \delta P + u P' + w P'' \quad (\gamma, \delta > 0)$

(3) $Q_d = Q_s$

Zur Vereinfachung nehmen wir an: u = w = 0, d.h. (2) wird ersetzt durch

(2') $Q_s = -\gamma + \delta P$

Die Koeffizienten m und n drücken die Erwartungen eines Käufers über die Preisentwicklung aus:

m > 0: wachsender Preis → wachsende Nachfrage Q_d

fallender Preis → fallende Nachfrage Q_d

Der Käufer erwartet bei m > 0 also, dass die Preisentwicklung anhält, er wird somit die Nachfrage (bei wachsendem P(t)) jetzt vergrössern, und nicht etwa einen Kauf auf später verschieben.

m < 0 hingegen widerspiegelt die Erwartung, dass die Preisentwicklung nicht anhält. Ähnlich zeigt das Vorzeichen von n die Einschätzung des Käufers bezüglich der Veränderungsrate des Trends an.

Aus den Gleichungen (1), (2'), (3) leiten wir eine Differentialgleichung für P(t) her:

(4)

$$P'' + \frac{m}{n} P' - \frac{\beta + \delta}{n} P = -\frac{\alpha + \gamma}{n}$$

Gleichgewichtslösung (Partikulärlösung): $P^* = \frac{\alpha + \gamma}{\beta + \delta}$

Für die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung kann einer der folgenden Fälle eintreten:

1. Fall:

$$\left(\frac{m}{n}\right)^2 \;>\; -4\left(\frac{\beta+\delta}{n}\right)$$

Dann ist

$$r_{1,2} \;=\; \frac{-\frac{m}{n} \pm \sqrt{\left(\frac{m}{n}\right)^2 + 4\left(\frac{\beta+\delta}{n}\right)}}{2}$$

Allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung (4):

$$P(t) \;=\; c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t} + \frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}$$

2. Fall:

$$\left(\frac{m}{n}\right)^2 \;=\; -4\left(\frac{\beta+\delta}{n}\right)$$

Dann ist

$$r_1 \;=\; r_2 \;=\; -\frac{m}{2n}$$

Allgemeine Lösung:

$$P(t) \;=\; (c_1 + c_2 t)\, e^{-\frac{mt}{2n}} + \frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}$$

3. Fall:

$$\left(\frac{m}{n}\right)^2 \;<\; -4\left(\frac{\beta+\delta}{n}\right)$$

Dann ist

$$r_{1,2} \;=\; u \pm iv, \qquad wobei$$
$$u \;=\; -\frac{m}{2n}$$
$$v \;=\; \frac{1}{2}\sqrt{-\left(\frac{m}{n}\right)^2 - 4\left(\frac{\beta+\delta}{n}\right)}$$

Allgemeine Lösung:

$$P(t) \;=\; (a\cos vt + b\sin vt)\, e^{-\frac{mt}{2n}} + \frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}$$

Analyse:

n > 0: Nur der 1. Fall ist möglich. Es ist dann eine der beiden Lösungen r_1 oder r_2 negativ, die andere positiv. P(t) divergiert; die Gleichgewichtslösung ist instabil.

n < 0: Jeder der drei Fälle ist möglich:

1. Fall: r_1 und r_2 sind negativ, falls auch m negativ ist. Damit haben wir

$$e^{r_1 t} \to 0, \qquad e^{r_2 t} \to 0$$

und die Gleichgewichtslösung

$$P^* \;=\; \frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}$$

ist stabil.

2. Fall: Falls auch $m < 0$ ist, erhalten wir dieselbe stabile Lösung wie oben, da nur in diesem Fall der Exponentialanteil der Preisfunktion nach Null strebt:

$$e^{-\frac{mt}{2n}} \to 0$$

3. Fall: Wiederum ist $m < 0$ Bedingung dafür, dass der Exponentialanteil der Preisfunktion gegen Null strebt:

$$e^{-\frac{mt}{2n}} \to 0$$

und somit

$$P(t) \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} P^* = \frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}$$

In allen drei Fällen gilt somit: Falls $n < 0$ und $m < 0$ dann ist die Gleichgewichtslösung P^* stabil:

$$P^* = \frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}$$

7. SYSTEME VON DIFFERENTIALGLEICHUNGEN. QUALITATIV-GRAPHISCHE ANALYSE: PHASENDIAGRAMME IN 2 VARIABLEN

Ebenso wie wir aus einer Graphik im Phasenraum etwas über das Langzeitverhalten der Lösung einer Differentialgleichung 1. Ordnung aussagen können (vgl. S. 33ff.), lassen sich auch Systeme von zwei Differentialgleichungen 1. Ordnung

$$x' = f(x(t), y(t))$$
$$y' = g(x(t), y(t))$$

graphisch analysieren. Wir beschränken uns auf autonome Differentialgleichungen, d.h. die Zeitvariable t tritt nicht als separable Variable in f und g auf. Wir lassen jedoch zu, dass f und g nicht linear sein können.

In einem (x,y) - Koordinatensystem stellen wir zunächst die Kurven ("Demarkationskurven")

$$x' = 0 \quad \text{d.h.} \quad f(x,y) = 0$$
$$y' = 0 \quad \text{d.h.} \quad g(x,y) = 0$$

dar. Ihre Schnittpunkte sind stationäre Punkte (zeitliche Gleichgewichte).

Um die Überlegungen an einer konkreten Graphik erläutern zu können, treffen wir die Voraussetzungen

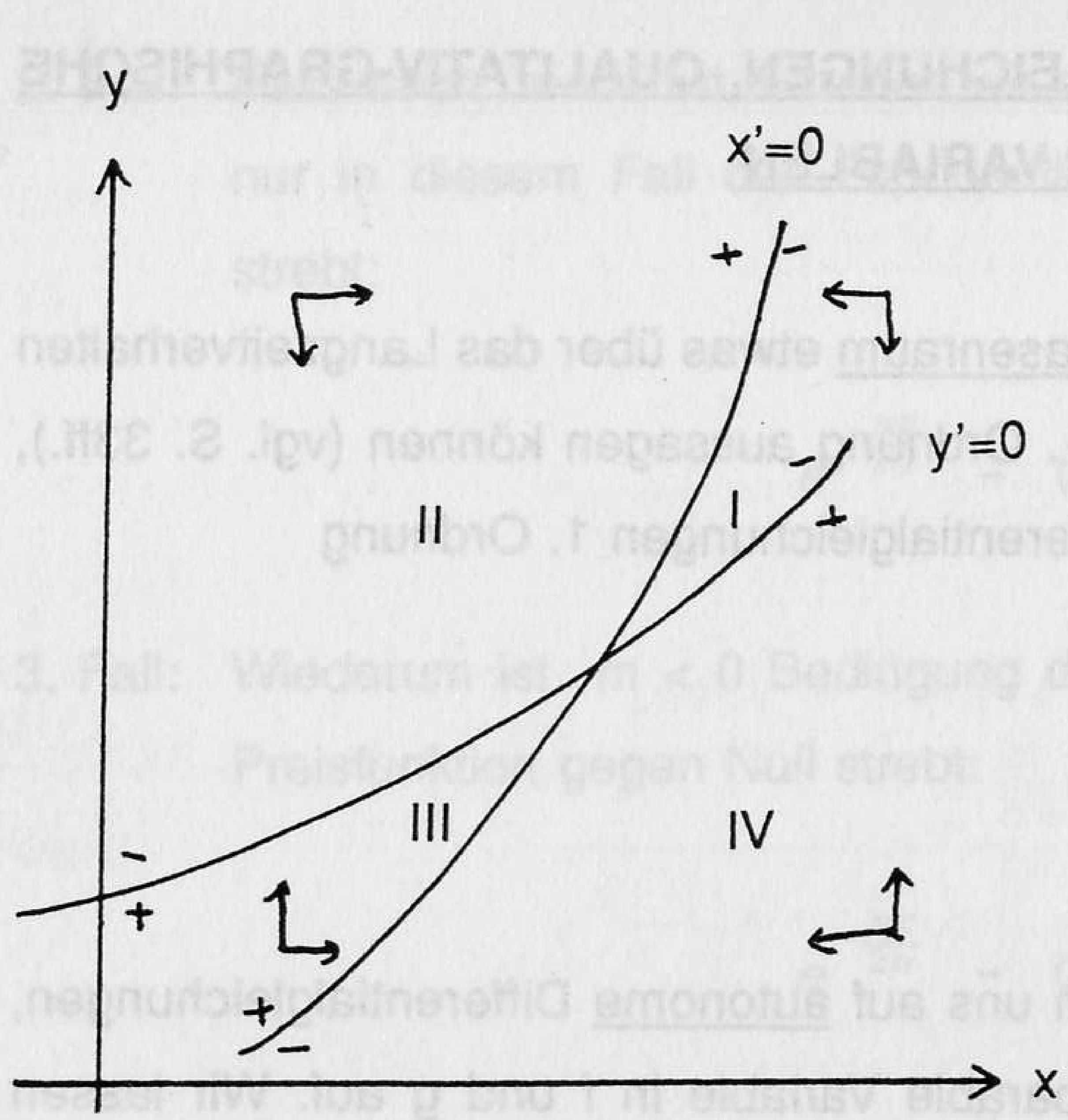
1) $f_x < 0, \quad f_y > 0, \quad g_x > 0, \quad g_y < 0$

Folgerung: $x' = 0$ und $y' = 0$ sind beides monoton steigende Kurven, denn

$$-\frac{f_x}{f_y} > 0 \quad und \quad -\frac{g_x}{g_y} > 0$$

2) Wir setzen ferner voraus: $-\frac{f_x}{f_y} > -\frac{g_x}{g_y}$

Dies bedeutet, dass die Kurve $x' = 0$ steiler verläuft als die Kurve $y' = 0$.



In jedem Bereich I, II, III, IV bestimmen wir das Vorzeichen von x' und y', d.h. die Richtung der zeitlichen Veränderung von x und y. Da

$$\frac{\partial x'}{\partial x} = f_x < 0$$

ist, fällt x', ist also links von x' = 0 positiv und rechts davon negativ.

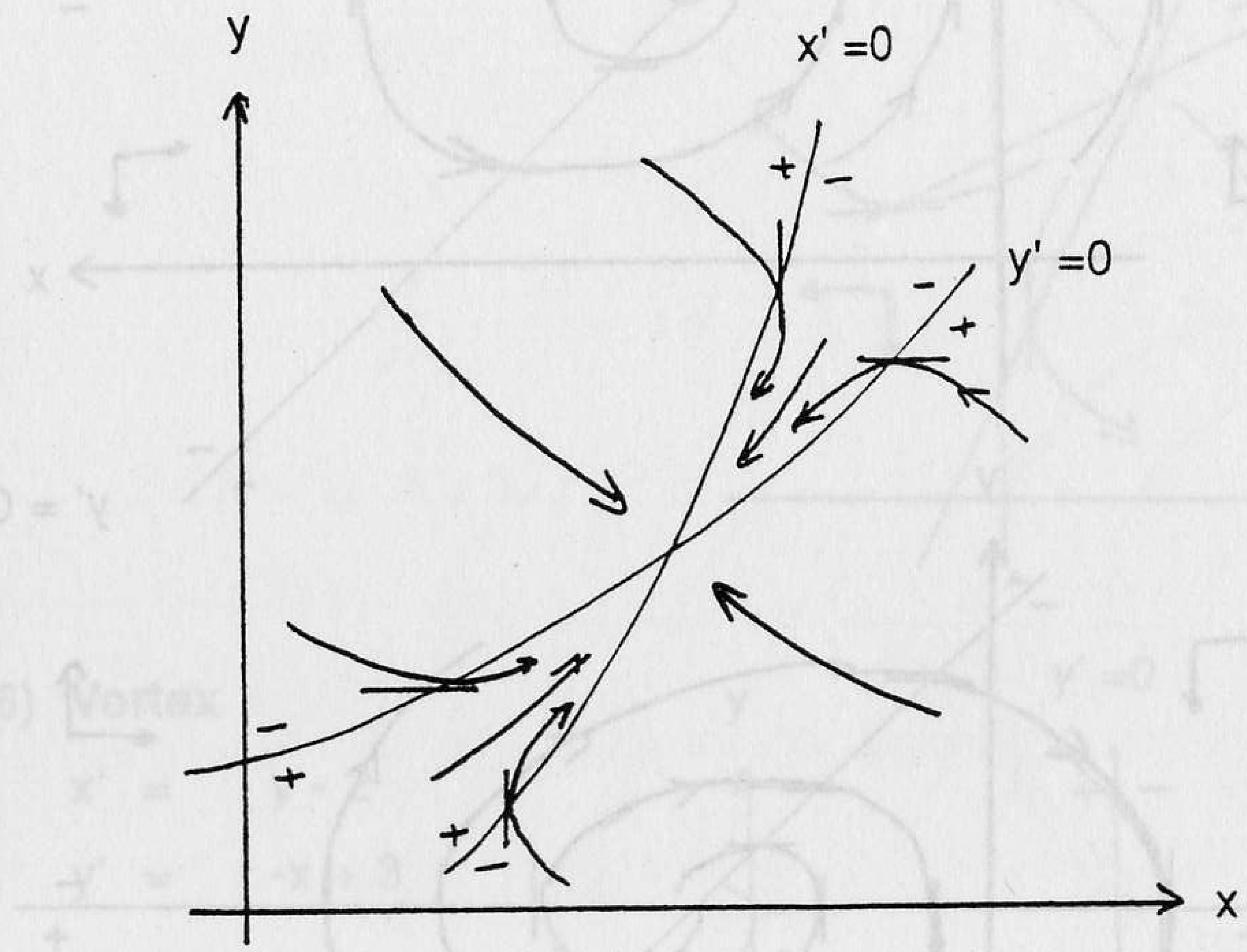
Wegen
$$\frac{\partial y'}{\partial y} = g_y < 0$$

ist y' unterhalb y' = 0 positiv, oberhalb negativ. Die Pfeilkombinationen verdeutlichen die zeitliche Veränderungsrichtung in den vier Bereichen I, II, III, IV.

Das Bild des Langzeitverhaltens lässt sich durch das Einzeichnen einiger typischer **Trajektorien** verdeutlichen. Trajektorien sind Lösungskurven (x(t), y(t)) in Parameterdarstellung. Die zeitliche Durchlaufrichtung wird durch Pfeile dargestellt. (Die Darstellung kann nichts aussagen über die Geschwindigkeit, mit der die Kurve durchlaufen wird.)

Ein Existenz- und Eindeutigkeitssatz garantiert dabei, dass unter recht allgemeinen Bedingungen durch jeden Punkt $a = x(t_0)$, $b = y(t_0)$ eine Trajektorie geht, und dass Trajektorien sich nicht schneiden.

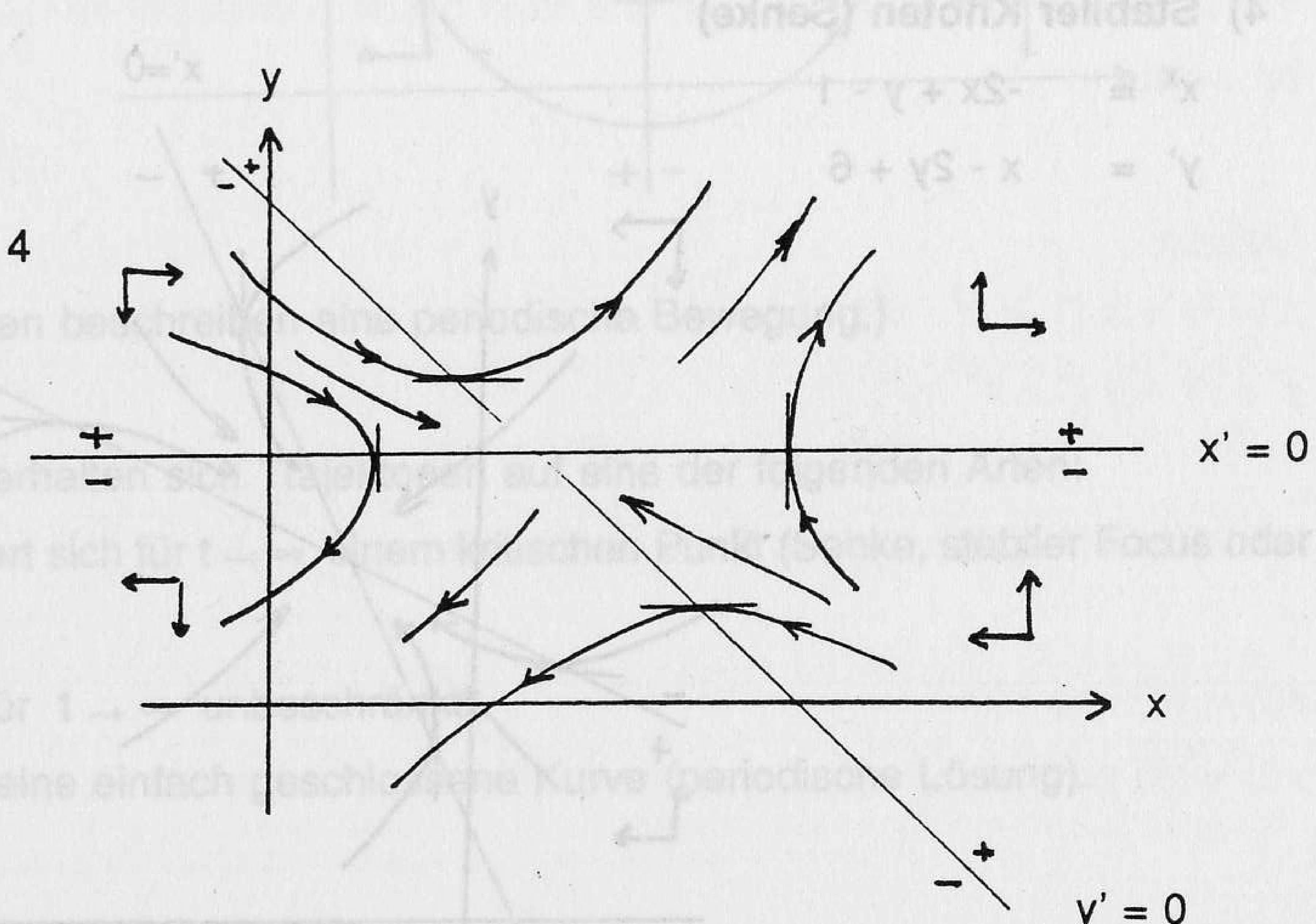
Beachte: Wenn eine Trajektorie die Kurve x' = 0 schneidet, dann vertikal; y' = 0 kann dagegen nur horizontal geschnitten werden. (y' = 0 heisst ja, dass y(t) sich lokal zeitlich nicht ändert.)



Beispiele: Sechs Beispiele sollen illustrieren, dass verschiedene Typen von Gleichgewichten möglich sind.

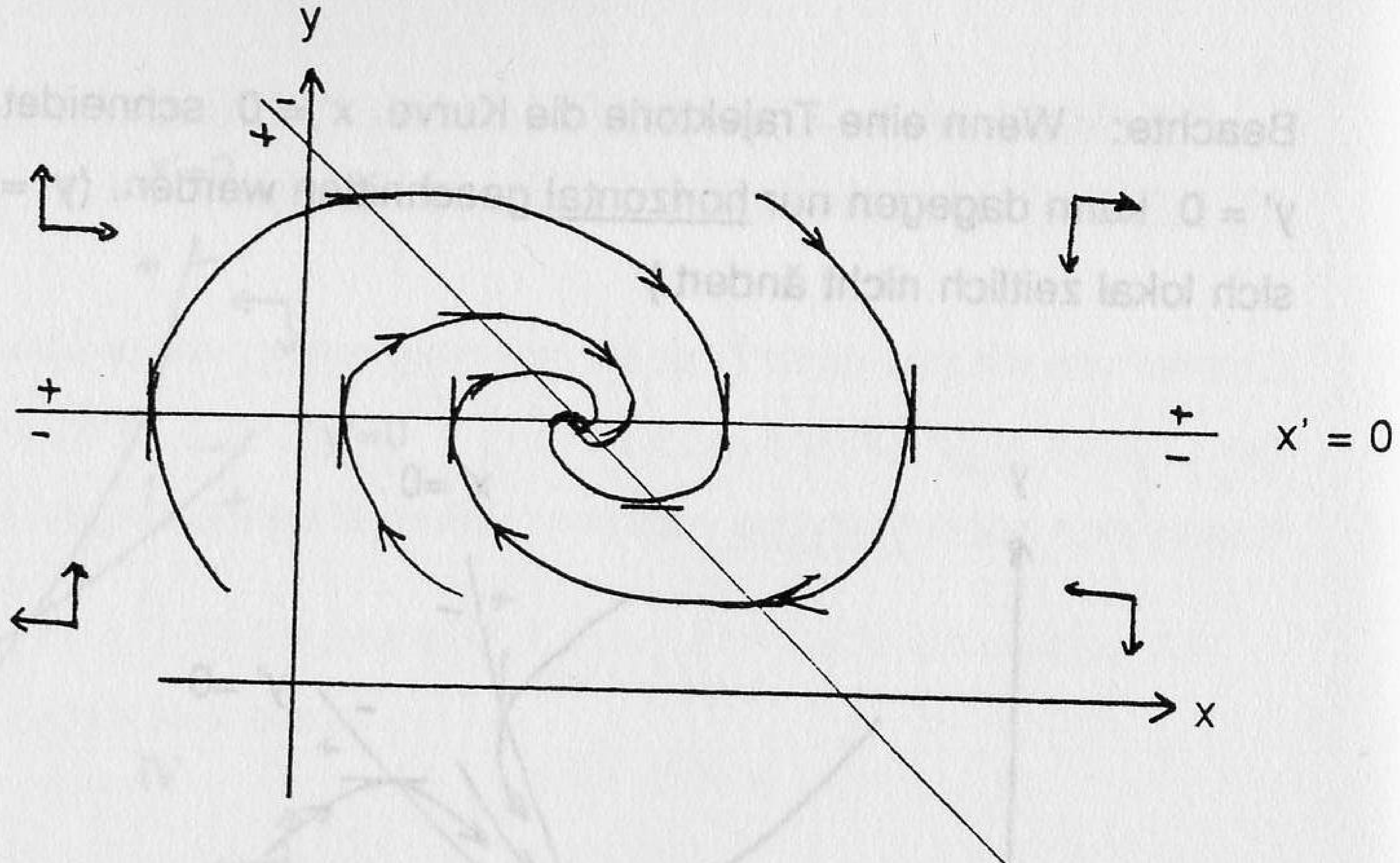
1) **Sattelpunkt**

$$x' = y - 2$$
$$y' = x + y - 4$$



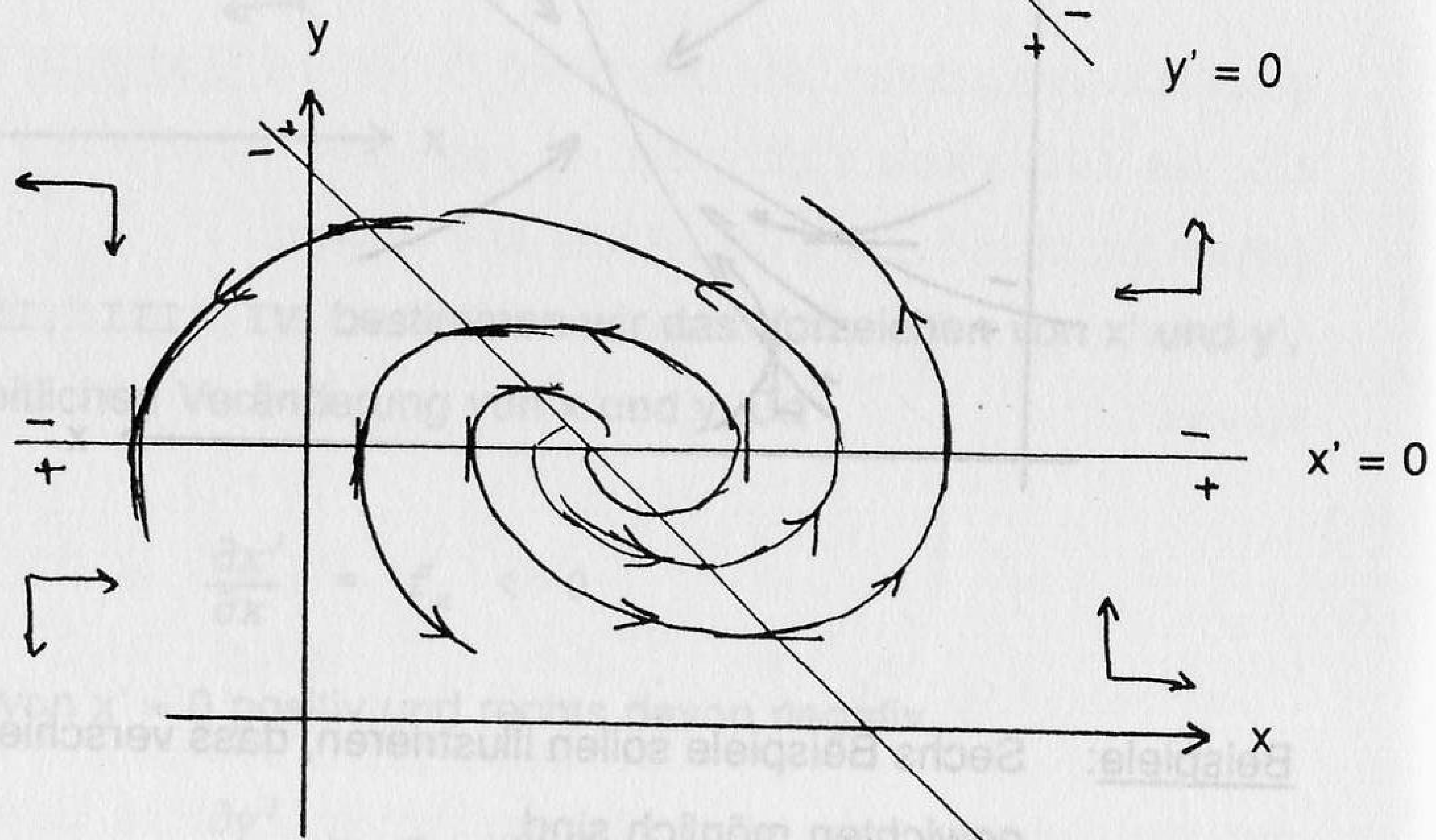
2) **Stabiler Focus**

$$x' = y - 2$$
$$y' = -x - y + 4$$



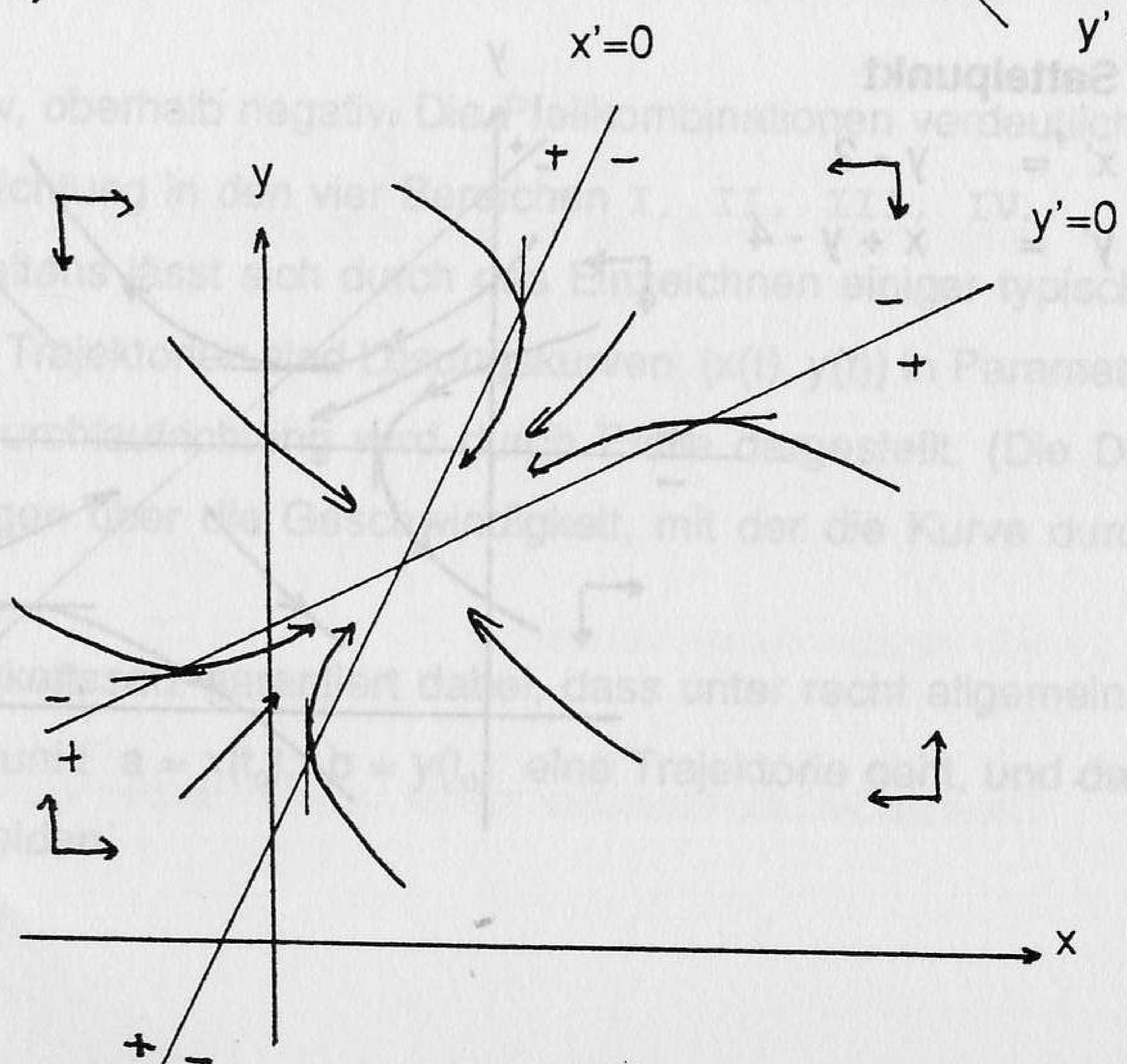
3) **Instabiler Focus**

$$x' = -y + 2$$
$$y' = x + y - 4$$



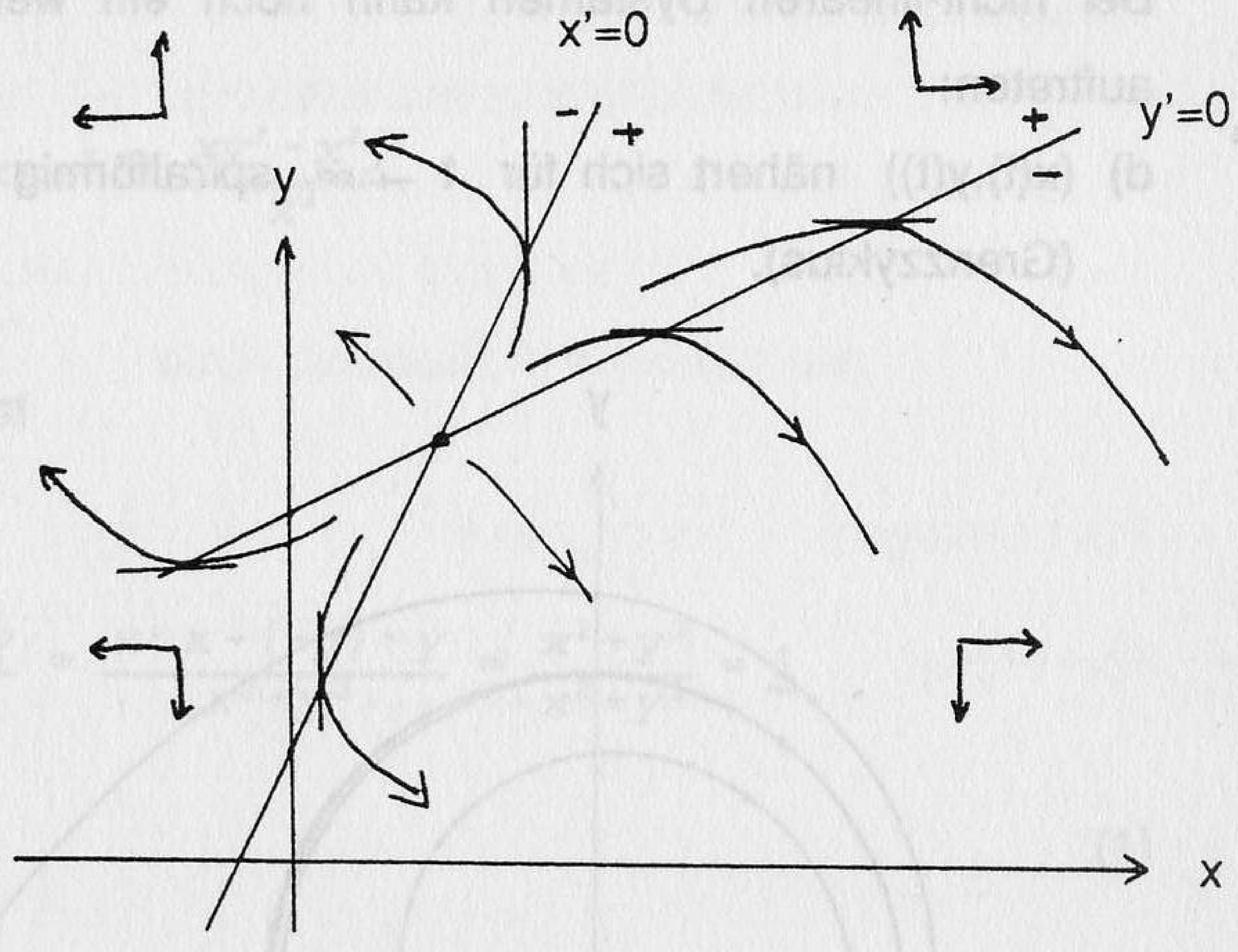
4) **Stabiler Knoten (Senke)**

$$x' = -2x + y - 1$$
$$y' = x - 2y + 6$$



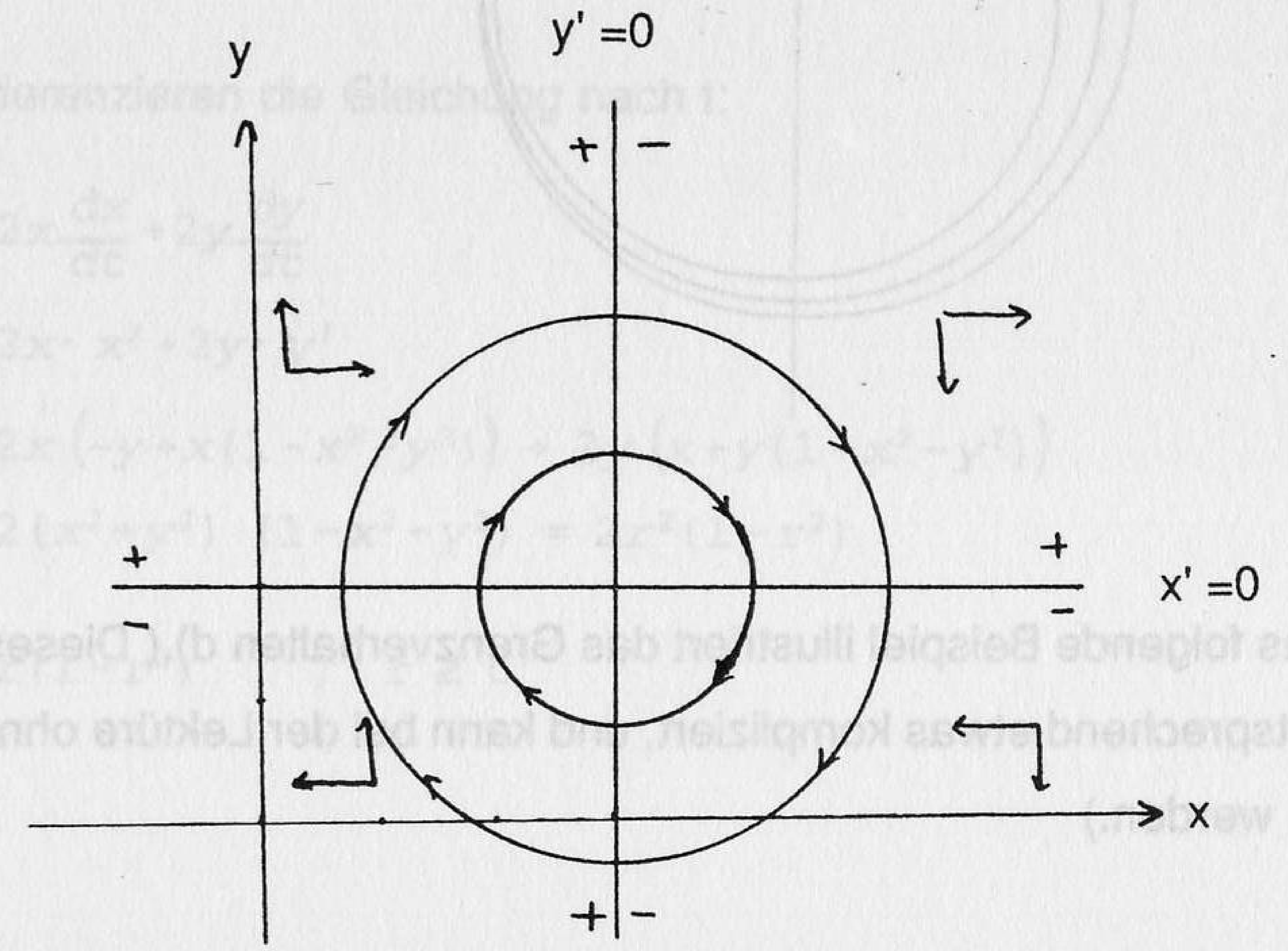
5) **Instabiler Knoten (Quelle)**

$$x' = 2x - y + 1$$
$$y' = -x + 2y - 6$$



6) **Vortex**

$$x' = y - 2$$
$$y' = -x + 3$$



(Die Trajektorien beschreiben eine periodische Bewegung.)

Typischerweise verhalten sich Trajektorien auf eine der folgenden Arten:

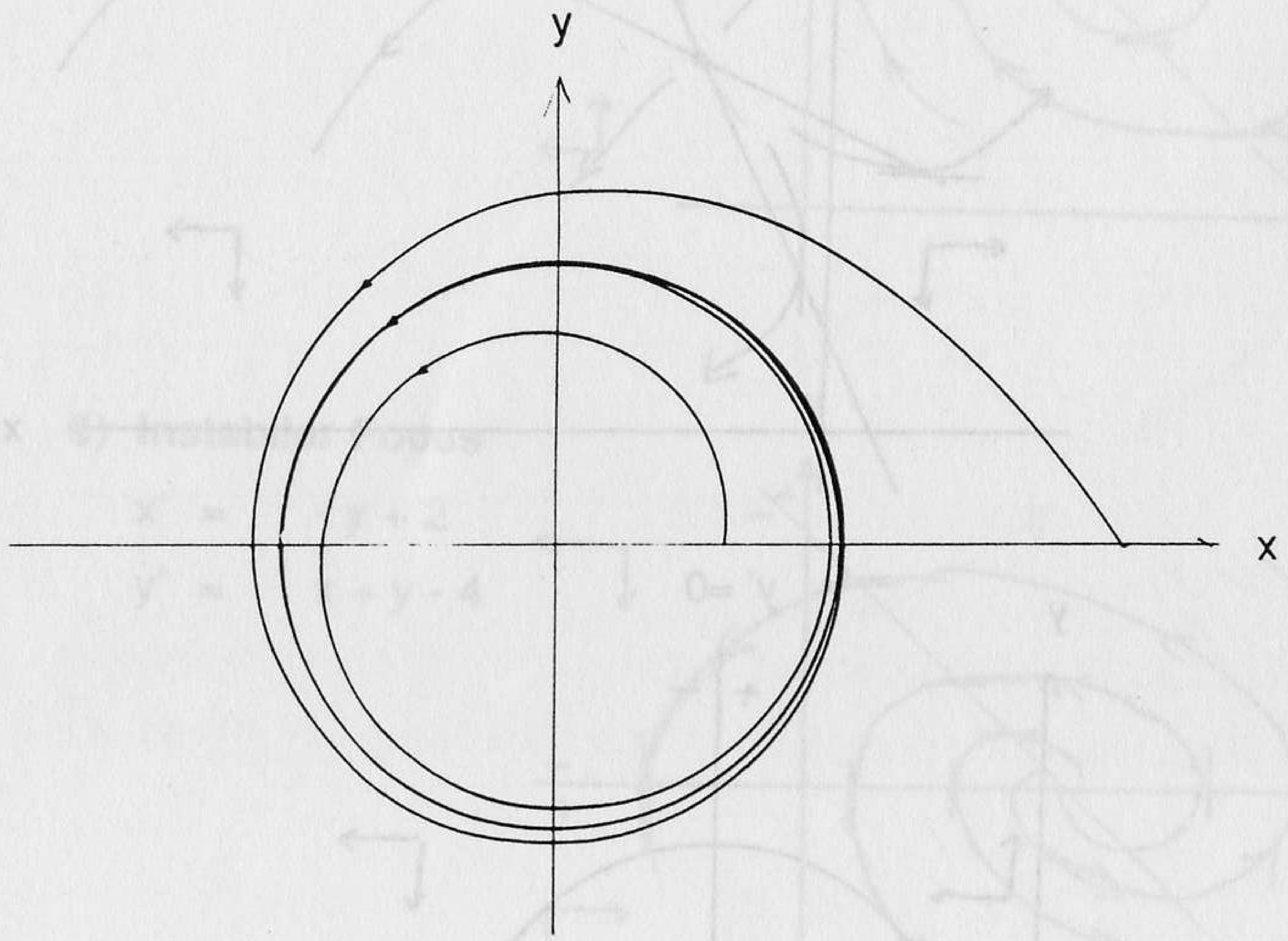
a) $(x(t),y(t))$ nähert sich für $t \to \infty$ einem kritischen Punkt (Senke, stabiler Focus oder Sattelpunkt).

b) $(x(t),y(t))$ ist für $t \to \infty$ unbeschränkt.

c) $(x(t),y(t))$ ist eine einfach geschlossene Kurve (periodische Lösung).

Bei nicht-linearen Systemen kann noch ein weiteres typisches Grenzverhalten auftreten:

d) (x(t),y(t)) nähert sich für $t \to \infty$ spiralförmig einer geschlossenen Trajektorie (Grenzzyklus).



Das folgende Beispiel illustriert das Grenzverhalten d).(Dieses Beispiel ist der Sache entsprechend etwas kompliziert, und kann bei der Lektüre ohne weiteres übersprungen werden.)

<u>Beispiel:</u>

$x' = -y + x\,(1 - x^2 - y^2)$

$y' = x + y\,(1 - x^2 - y^2)$

Wir drücken x(t) und y(t) in Polarkoordinaten aus

$x(t) = r(t)\cos\theta(t)$

$y(t) = r(t)\sin\theta(t)$

Es gilt:

(i)

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)\right) = \cos^2\theta\,\frac{xy' - x'y}{x^2}$$

Mit $\cos^2\theta = \dfrac{x^2}{x^2+y^2}$ ist

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{xy' - x'y}{x^2+y^2} = \frac{x\cdot x - (-y)\cdot y}{x^2+y^2} = \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} = 1$$

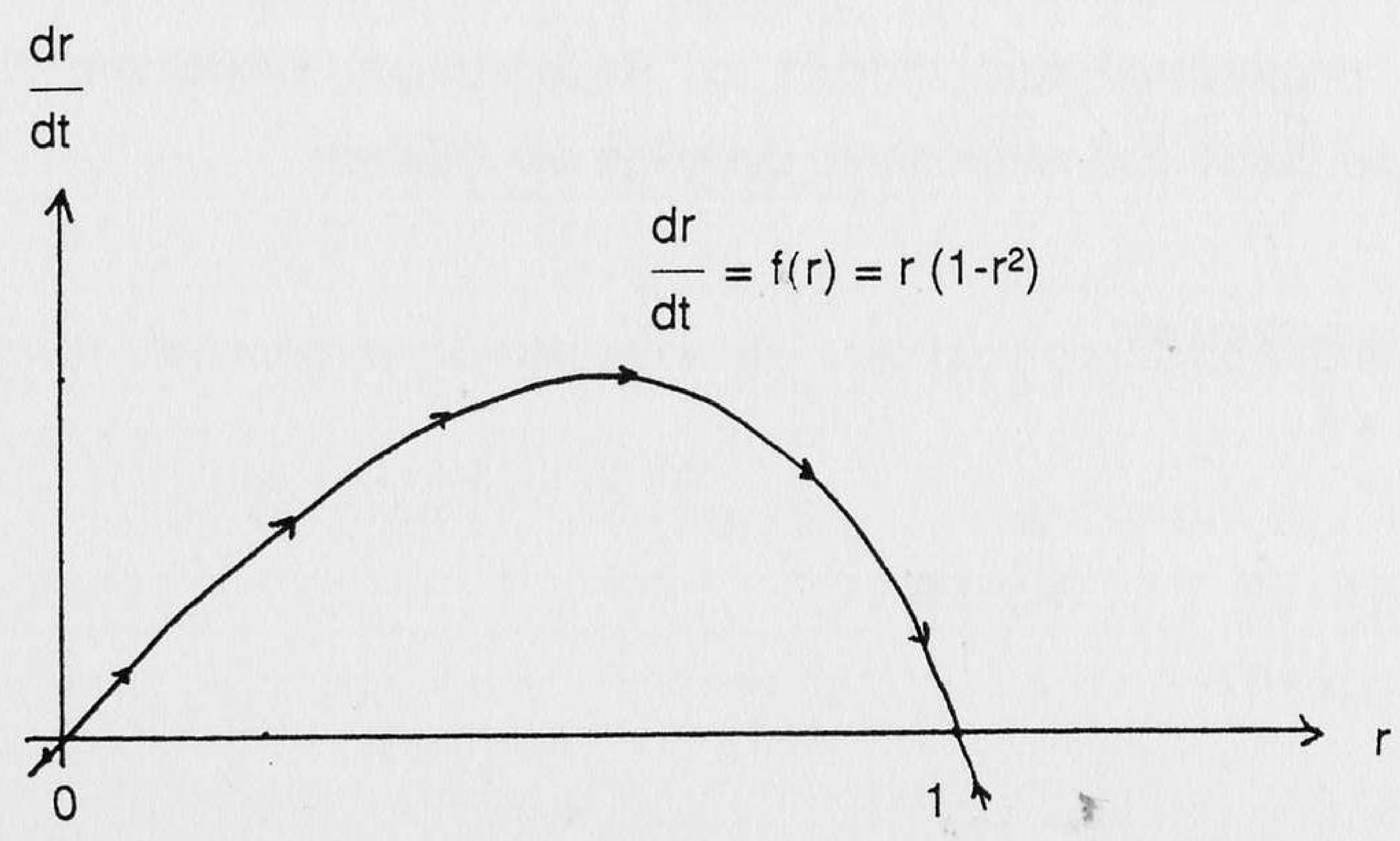
Folgerung: $\theta = \theta_0 + t$ (1)

(ii) $r^2 = x^2 + y^2$. Wir differenzieren die Gleichung nach t:

$$\begin{aligned} 2r\frac{dr}{dt} &= 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} \\ &= 2x\cdot x' + 2y\cdot y' \\ &= 2x\left(-y + x(1-x^2-y^2)\right) + 2y\left(x + y(1-x^2-y^2)\right) \\ &= 2(x^2+y^2)\,(1-x^2-y^2) = 2r^2(1-r^2) \end{aligned}$$

$$\frac{dr}{dt} = r(1-r^2) \quad , \quad r \geq 0$$

Phasendiagramm:



$r = 0$ $\quad (x(t) = 0\ , y(t) = 0)$

instabile Gleichgewichtslösung

$r = 1$ $\quad r(t) = 1 \qquad x^2 + y^2 = 1$

geschlossene Trajektorie: Kreis

Für beliebiges $\quad r > 0\ ,\ r \neq 1$

konvergiert $\quad \underline{r(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} 1}$ (2)

Aufgaben:

Man skizziere ein Phasenportrait (Demarkationskurven, einige typische Trajektorien) für die folgenden Systeme von Differentialgleichungen und überlege sich in jedem Fall, welches Langzeitverhalten der Lösungen zu erwarten ist:

1) $x' = x - 2y$
   $y' = 2x - 3y$

2) $x' = y$
   $y' = x$

3) $x' = 2y$
   $y' = -x + \sin y$

4) $x' = x - y$
   $y' = x^2 - y$

5) $x' = x\,y - 2$
   $y' = x - 2y$

6) $x' = y - 1$
   $y' = x^2 - y$

Oekologische Anwendung "Räuber-Beute-Modelle"

$x' = ax - bxy = x(a - by)$; $a,b > 0$

$y' = -cy + dxy = y(-c + dx)$; $c,d > 0$

Dieses Gleichungssystem resultiert aus den folgenden Modellvorstellungen:

Zwei Tierarten befinden sich in einer gewissen (geschlossenen) Umgebung. Die eine Art (die "Räuber") ernährt sich ausschliesslich von der anderen Art (der "Beute"), welche sich ihrerseits von etwas ernährt, was in der Umgebung stets ausreichend vorhanden ist.

Annahmen:

1) In Abwesenheit von Räubern würde die Population x(t) der Beute wachsen mit Wachstumsrate

$$\frac{dx}{dt} = ax \quad , \quad a > 0$$

2) In Abwesenheit von Beute würde die Population y(t) der Räuber abnehmen mit Rate

$$\frac{dy}{dt} = -cy \quad , \quad c > 0$$

3) Sind Räuber und Beute vorhanden, so werden die obigen Wachstumsraten korrigiert um Terme, die proportional zur Häufigkeit von Begegnungen der beiden Arten sind, also proportional zum Produkt xy. Begegnungen verkleinern die Wachstumsrate der Beute und vergrössern diejenige der Räuber!

Zur Vereinfachung setzen wir

$a = b = c = d = 1$

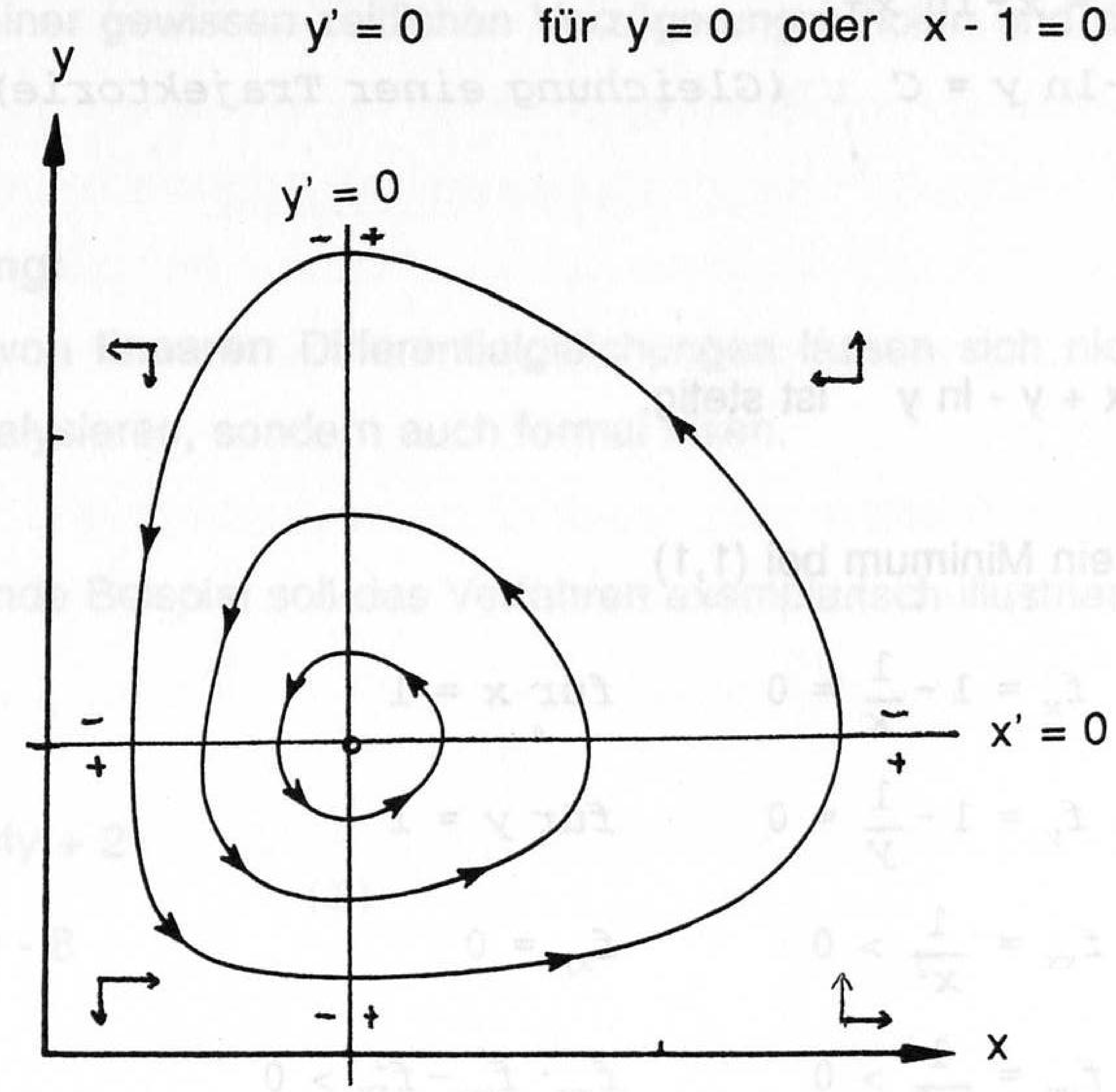
$x' = x - xy = x(1 - y)$, $x,y \geq 0$

$y' = -y + xy = y(x - 1)$

Analyse im Phasenraum:

Demarkationslinien: $x' = 0$ für $x = 0$ oder $1 - y = 0$, d.h. $y = 1$

$y' = 0$ für $y = 0$ oder $x - 1 = 0$, d. h. $x = 1$



Beachte: Die Trajektorien sind geschlossene Kurven.

Nachweis:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x(1-y) \\ \frac{dy}{dt} &= y(x-1) \end{aligned}\right\} \cdot \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y(x-1)}{x(1-y)}$$

Durch Trennung der Variablen erhält man die integrierbare Differentialgleichung

$$dy\,\frac{(1-y)}{y} = dx\left(\frac{x-1}{x}\right)$$

$$\frac{1}{y}\,dy - dy = dx - \frac{1}{x}\,dx$$

$$\ln y - y + C_1 = x - \ln x + C_2$$

$$x + y - \ln x - \ln y = C \qquad (\mathit{Gleichung\ einer\ Trajektorie})$$

1) Die Funktion
$z = f(x,y) = x - \ln x + y - \ln y$ ist stetig.

2) Sie besitzt genau ein Minimum bei (1,1)

$$f_x = 1 - \frac{1}{x} = 0 \qquad \text{für } x = 1$$

$$f_y = 1 - \frac{1}{y} = 0 \qquad \text{für } y = 1$$

$$f_{xx} = \frac{1}{x^2} > 0 \qquad f_{xy} = 0$$

$$f_{yy} = \frac{1}{y^2} > 0 \qquad f_{xx} \cdot f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$$

$f_{min}\,(1,1) = 2$

3) Für $x \to 0$, $y \to 0$, $x \to \infty$ oder $y \to \infty$ strebt $f(x,y) \to \infty$.

Folgerung aus 1), 2) und 3):
Für jeden Wert $C > 2$ ist die Niveau-Linie $f(x,y) = C$ eine geschlossene Kurve.

Unter den obigen Modellvoraussetzungen hat das System periodische Lösungen:
Folgen wir dem Verlauf einer Trajektorie, so sehen wir:

Die Beute-Population x(t) ist maximal für $y = \left(\frac{a}{b}\right)$.

Während die Räuber-Population y(t) noch zunimmt, geht x(t) auf den minimalen Wert c/d zurück. Nun wird die Räuber-Population zurückgehen, die Beute-Population kann sich mit einer gewissen zeitlichen Verzögerung erholen und der Kreislauf schliesst sich.

Bemerkung:
Systeme von **linearen** Differentialgleichungen lassen sich nicht nur qualitativ-graphisch analysieren, sondern auch formal lösen.

Das folgende Beispiel soll das Verfahren exemplarisch illustrieren:

Beispiel:

$$\begin{aligned} x' &= 3x + 4y + 2 \\ y' &= 3x - y - 8 \end{aligned} \qquad (I)$$

Wir bauen die allgemeine Lösung auf als Summe einer Partikulärlösung $\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix}$ des inhomogenen Systems und der allgemeinen Lösung des zugehörigen homogenen Systems

$$\begin{aligned} x' &= 3x + 4y \\ y' &= 3x - y \end{aligned} \qquad (H)$$

Partikulärlösung:
Ansatz:

$$\begin{pmatrix} x^*(t) \\ y^*(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}, \qquad c,d \ \mathit{konstant}$$

Dann ist $(x^*)' = 0$, $(y^*)' = 0$, und somit

$$\left.\begin{array}{l} 3c+4d+2=0 \\ 3c-d-8=0 \end{array}\right\} \quad 5d=-10 \quad \underline{d=-2} \quad \underline{c=2}$$

$$\begin{pmatrix} x^*(t) \\ y^*(t) \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}} \quad \textit{ist Partikulärlösung}$$

<u>Allgemeine Lösung von (H)</u>

Wir wählen den folgenden Ansatz:

$x(t) = m \cdot e^{rt} \quad \rightarrow \quad x'(t) = r\,m\,e^{rt}$

$y(t) = n \cdot e^{rt} \quad \rightarrow \quad y'(t) = r\,n\,e^{rt}$

Einsetzen in (H) (und Division durch e^{rt}) führt auf das Gleichungssystem

$$\begin{array}{lll} r\,m = 3m + 4n & \text{bzw.} & (3-r)m + 4n = 0 \\ r\,n = 3m - n & & 3 \cdot m - (1+r)\,n = 0 \end{array}$$

Dieses System hat dann und nur dann nicht-triviale Lösungen m,n, wenn die Koeffizientenmatrix singulär ist, d.h. wenn

$$\begin{vmatrix} 3-r & 4 \\ 3 & -(1+r) \end{vmatrix} = -(3-r)(1+r)-12 = 0$$

$$r^2 - 2r - 15 = 0 \qquad r_1 = 5 \qquad r_2 = -3$$

$$m_1 = 2n_1 \qquad m_2 = -2/3\, n_2$$

Allgemeine Lösung:

$$\underline{\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{5t} + d \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} e^{-3t} + \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}}$$

8. DIFFERENZENGLEICHUNGEN 1. UND 2. ORDNUNG

In Band 2 wurden lineare Differenzengleichungen 1. und 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten und konstanter rechter Seite behandelt. Wir stellen hier die Ergebnisse zusammen und erweitern die Theorie auf Differenzengleichungen mit variabler rechter Seite (variabler "Störfunktion"). Ferner werden wir auch <u>Systeme</u> von Differenzengleichungen und eine Anzahl von <u>Oekonomischen Anwendungen</u> behandeln.

(A) Die Lösung der linearen Differenzengleichung 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten und konstanter rechter Seite

$y_{k+1} - A\,y_k = B \qquad$ bezw. $\qquad y_{k+1} = A\,y_k + B$

ist

$$\boxed{\begin{array}{ll} y_k = A^k(y_0 - y^*) + y^*\,, & k = 0,1,2,\ldots \\ \textit{wobei } y^* = \dfrac{B}{1-A}\,, & \textit{für } A \neq 1 \\ y_k = y_0 + B\,k\,, \quad k = 0,1,2,\ldots\,, & \textit{für } A = 1 \end{array}}$$

<u>Lösungsverhalten:</u>

$A > 0$	$\leftrightarrow$	Lösung monoton
$A < 0$	$\leftrightarrow$	Lösung oszillierend
$\lvert A\rvert < 1$	$\leftrightarrow$	Lösung konvergent:

$$\lim_{k \to \infty} y_k = y^* = \frac{B}{1-A}$$

ist ein <u>stabiler Grenzwert</u>.

(B) Die allgemeine Lösung der homogenen linearen Differenzengleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

(H) $y_{k+2} + a_1 y_{k+1} + a_2 y_k = 0$

finden wir mittels des Ansatzes:

$y_k = m^k$

Einsetzen:

$$m^{k+2} + a_1 m^{k+1} + a_2 m^k = m^k\ (m^2 + a_1 m + a_2) = 0$$

führt auf die Bedingung:

$m^2 + a_1 m + a_2 = 0$ "charakteristische Gleichung"

Die Lösungen der charakteristischen Gleichung

$$m_{1,2} = \frac{-a_1 \pm\sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2}$$

können
- reell und verschieden,
- reell und gleich,
- konjugiert komplex sein.

1. Fall

$a_1^2 - 4a_2 > 0$: allgemeine Lösung:

$(m_1 \neq m_2)$ $y_k = c_1 m_1^k + c_2 m_2^k$, $k = 0,1,2,\ldots$

2. Fall

$a_1^2 - 4a_2 = 0$: Neben $y_k^{(1)} = m^k$

$(m_1 = m_2 = m)$ ist auch $y_k^{(2)} = k\, m^k$ eine Lösung.

Die allgemeine Lösung kann dargestellt werden als

$$y_k = (c_1 + c_2 k)\, m^k, \quad k = 0,1,2,\ldots$$

3. Fall

$$a_1^2 - 4a_2 < 0 \qquad m_{1,2} = -\frac{a_1}{2} \pm i\,\frac{\sqrt{4a_2 - a_1^2}}{2}$$

$$= u \pm iv = r(\cos\varphi \pm i \sin\varphi)$$

wobei r und φ Betrag und Argument der komplexen Zahl m_1 darstellen (vgl. Anhang S. 154 ff.)

Beachtet man, dass

$$[r(\cos\varphi \pm i\sin\varphi)]^k = r^k(\cos k\varphi \pm i \sin k\varphi)\ ,$$

so lässt sich die allgemeine komplexe Lösung darstellen als

$$y_k = r^k\left[c_1(\cos k\varphi + i\sin k\varphi) + c_2(\cos k\varphi - i\sin k\varphi)\right]$$

$$= r^k\left[(c_1 + c_2)\cos k\varphi + i(c_1 - c_2)\sin k\varphi\right],$$

c_1, c_2 beliebige komplexe Konstanten.

Im Hinblick auf ökonomische Anwendungen sind wir nur an reellen Lösungen interessiert.

Setzt man $c_1 = A + iB$, $c_2 = A - iB$

so ist $c_1 + c_2 = 2A = \underline{a}$ (reell) $i(c_1 - c_2) = -2B = \underline{b}$ (reell)

und

$$y_k = r^k(a\cos k\varphi + b \sin k\varphi)\ ,\ k = 0,1,2,\ldots$$

die allgemeine (reelle) Lösung von (H).

Beispiel 1:

$$y_{k+2} + y_k = 0$$

$$m^2 + 1 = 0 \qquad m_{1,2} = \pm i \qquad \underline{r = 1} \qquad \underline{\varphi = \pi/2}$$

allgemeine Lösung:

$$\underline{y_k = a \cos(k \cdot \pi/2) + b \sin(k \cdot \pi/2)} \quad , \qquad k = 0,1,2,\ldots$$

Beispiel 2:

$$y_{k+2} + 2y_{k+1} + 4y_k = 0$$

$$m^2 + 2m + 4 = 0$$

$$m_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-16}}{2} = -1 \pm i\sqrt{3}$$

$$r = 2 \quad , \quad \varphi = \frac{2\pi}{3}$$

allgemeine Lösung:

$$y_k = 2^k \left(a \cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{3}\right) + b \sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{3}\right)\right) \qquad k = 0,1,2,\ldots$$

Zusatzfrage: Welche Lösung erfüllt die Anfangsbedingungen $y_0 = 1$, $y_1 = 4$?

$$y_0 = 2^0 (a \cos 0 + b \sin 0) = \underline{a = 1}$$

$$y_1 = 2^1 (a \cos(2\pi/3) + b \sin(2\pi/3)) = 4$$

$$-\frac{1}{2} + b\frac{\sqrt{3}}{2} = 2 \quad \Rightarrow \quad \underline{b = \frac{5\sqrt{3}}{3}}$$

Lösung des Anfangswertproblems:

$$y_k = 2^k \left(\cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{3}\right) + \frac{5\sqrt{3}}{3} \sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{3}\right)\right) \qquad k = 0,1,2,\ldots$$

Inhomogene lineare Differenzengleichungen 2. Ordnung:

(I) $\quad y_{k+2} + a_1 y_{k+1} + a_2 y_k = r_k \;;\quad r_k$ Störfunktion

Lösungsstruktur:

$$y_k = y_k^{(H)} + y_k^* \,, \quad \begin{cases} y_k^{(H)} : & \textit{allgemeine Lösung von (H)} \\ y_k^* : & \textit{Partikulärlösung von (I)} \end{cases}$$

Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung ist gleich der Summe der allgemeinen Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung und einer Partikulärlösung der inhomogenen Gleichung.
(Nachweis: durch Einsetzen)

Zum Auffinden einer (möglichst einfachen) Partikulärlösung von (I) verwenden wir - in Analogie zu der entsprechenden Methode bei Differentialgleichungen - die "Methode der unbestimmten Koeffizienten".

Diese Technik wird im folgenden an einigen Beispielen erläutert.

Störfunktion vom Typ $r_k = a^k$

Beispiel 1: $y_{k+2} - 3y_{k+1} + 2y_k = 3^k$

Ansatz: $y_k^* = c \cdot 3^k$, mit unbekanntem c

Einsetzen in der Differenzengleichung:

$$c \cdot 3^{k+2} - 3 \cdot c \cdot 3^{k+1} + 2 \cdot c \cdot 3^k = 3^k$$

$$9c - 3 \cdot 3c + 2c = 1 \quad \Rightarrow \quad \underline{c = \frac{1}{2}}$$

$\underline{y_k^* = \frac{1}{2} \cdot 3^k}$ ist Partikulärlösung.

Beispiel 2: $y_{k+2} - 3y_{k+1} + 2y_k = 2^k$

Ansatz: $y_k^* = c \cdot 2^k$, eingesetzt in die Gleichung:

$$c \cdot 2^{k+2} - 3 \cdot c \cdot 2^{k+1} + 2 \cdot c \cdot 2^k = 2^k$$

$$\underbrace{4c - 6c + 2c}_{0} = 1 \quad \textit{Widerspruch !}$$

Der obige Ansatz versagt!

Grund: $y_k = c \cdot 2^k$ ist bereits eine Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung (Nachweis?) und kann daher nicht auch Lösung der inhomogenen Gleichung sein.

Revidierter Ansatz: $y_k^* = c \cdot k \cdot 2^k$, eingesetzt in die Gleichung:

$$c \cdot 2^k \left[(k+2) \cdot 4 - (k+1) \cdot 6 + k \cdot 2\right] = 2^k$$

$$2 \cdot c = 1 \qquad \underline{c = \frac{1}{2}}$$

$y_k^* = \frac{1}{2}\, k\, 2^k$ *ist eine Partikulärlösung.*

Störfunktion vom Typ $r_k = k^n$

Beispiel 3: $2y_{k+2} - y_k = k^2$

Ansatz: $y_k^* = a\,k^2 + b\,k + c$; mit unbekannten Koeffizienten a,b,c

$$2\left[a(k+2)^2 + b(k+2) + c\right] - \left[ak^2 + bk + c\right] = k^2$$

$$ak^2 + (8a+b)\,k + (8a+4b+c) = k^2 = 1 \cdot k^2 + 0 \cdot k + 0$$

Koeffizientenvergleich: $\underline{a = 1}$

$8a + b = 0 \Rightarrow \underline{b = -8}$

$8a + 4b + c = 0 \Rightarrow \underline{c = 24}$

$y_k^* = k^2 - 8k + 24$ ist eine Partikulärlösung.

Trigonometrische Störfunktion

Beispiel 4:
$$8y_{k+2} - 6y_{k+1} + y_k = 5 \sin \frac{k\pi}{2}$$

Ansatz: $y_k^* = a \sin \frac{k\pi}{2} + b \cos \frac{k\pi}{2}$; a, b *unbestimmt*

$$8y_{k+2}^* - 6y_{k+1}^* + y_k^* = 8\left(a \sin \frac{(k+2)\pi}{2} + b \cos \frac{(k+2)\pi}{2}\right)$$
$$- 6\left(a \sin \frac{(k+1)\pi}{2} + b \cos \frac{(k+1)\pi}{2}\right) + \left(a \sin \frac{k\pi}{2} + b \cos \frac{k\pi}{2}\right)$$

Vereinfacht man diesen Ausdruck z.B. mittels der Additionstheoreme, findet man

$$(-7a + 6b) \sin \frac{k\pi}{2} + (-6a - 7b) \cos \frac{k\pi}{2} = 5 \sin \frac{k\pi}{2}$$

Koeffizientenvergleich:

$$-7a + 6b = 5$$
$$-6a - 7b = 0 \qquad a = -\frac{7}{17} \qquad b = \frac{6}{17}$$

$$y_k^* = \frac{1}{17}\left(-7\sin\frac{k\pi}{2} + 6\cos\frac{k\pi}{2}\right) \qquad \textit{ist eine Partikulärlösung.}$$

Die häufigsten Störfunktionen und die entsprechenden Ansätze für eine Partikulärlösung y_k der inhomogenen Differenzengleichung

$$y_{k+2} + a_1 y_{k+1} + a_2 y_k = r_k$$

sind im folgenden tabellarisch dargestellt.

Störfunktion r_k	**Ansatz (1)** y_k^*	**eventuell: Ansatz, falls (1) bereits Lösung der homog. Gleichung ist**
r = konstant	$y_k^* = c \left(= \frac{r}{1+a_1+a_2}\right)$	$y_k^* = c\,k$
$r_k = k$ bzw. $r_k = c_0 + c_1 k$	$y_k^* = a + bk$	$y_k^* = k^2(a+bk)$
$r_k = k^n$ bzw. $r_k = c_0 + c_1 k + \ldots + c_n k^n$	$y_k^* = a_0 + a_1 k + \ldots + a_n k^n$	
$r_k = a^k$	$y_k^* = c\,a^k$	$y_k^* = k\,c\,a^k$
$r_k = \sin k\varphi$ bzw. $r_k = \cos k\varphi$	$y_k^* = a\sin k\varphi + b\cos k\varphi$	$y_k^* = k[a\sin k\varphi + b\cos k\varphi]$

Aufgaben:

1) $y_{k+2} - 3y_{k+1} + \frac{5}{4}y_k = 2k \quad ; \quad y_0 = \frac{23}{9} \quad y_1 = \frac{8}{9}$

2) $y_{k+2} + y_k = \sin\frac{k\pi}{2} \quad ; \quad y_0 = 2 \quad y_1 = -\frac{1}{2}$

3) $y_{k+2} - 4y_{k+1} + 4y_k = 3k + 2^k \quad ; \quad y_0 = 1 \quad y_1 = 0$

Lösungen:

1)
$$y_k = +\frac{1}{4}\left(\frac{5}{2}\right)^k - \frac{5}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^k - \frac{8}{3}k + \frac{32}{9}$$

2)
$$y_k = 2\cdot\cos\frac{k\pi}{2} - 1/2\,k\sin\frac{k\pi}{2}$$

3)
$$y_k = \left(-5 + \frac{3}{8}k\right)\cdot 2^k + \frac{1}{8}k^2\cdot 2^k + 3k + 6$$
$$= \left(\frac{1}{8}k^2 + \frac{3}{8}k - 5\right)\cdot 2^k + 3k + 6$$

Anwendung 1: **Lagerhaltungsmodell von Metzler**

Annahmen:

(1) Die Investition, die eine Firma in jeder Periode t tätigt, kann aufgespalten werden in

I_0 = konstant: nicht-induzierte Investition

I_t : induzierte Investition, welche getätigt wird, um "optimalen Lagerbestand" zu gewährleisten.

(2) Die Gesamtproduktion Q_t setzt sich zusammen aus Produktion für den Verkauf P_t und Produktion auf Lager (=Investition):

$Q_t = P_t + I_t + I_0$

(3) V_t bezeichne den effektiven Verkauf in der Periode t. Es wird vorausgesetzt, dass in jeder Periode ein konstanter Bruchteil der Gesamtproduktion verkauft wird:

$V_t = b\,Q_t$; $0 < b < 1$

(4) In jeder Periode sei die Produktion für den Verkauf P_t gleich dem effektiven Verkauf der Vorperiode:

$P_t = V_{t-1}$

(5) Die Lagerbestände sollen auf einem konstanten Niveau gehalten werden:

$I_t = V_{t-1} - P_{t-1}$

(Uebertrifft beispielsweise der Verkauf die Produktion für den Verkauf, so wird in der nächsten Periode der Lagerbestand entsprechend vergrössert.)

Das Modell wird also beschrieben durch die Gleichungen:

(i) $Q_t = P_t + I_t + I_0$

(ii) $V_t = b\,Q_t$; $0 < b < 1$

(iii) $P_t = b\,Q_{t-1}$

(iv) $I_t = V_{t-1} - P_{t-1}$

Aus diesen Gleichungen folgt für die Gesamtproduktion Q_t:

$$Q_t = P_t + V_{t-1} - P_{t-1} + I_0$$
$$= bQ_{t-1} + bQ_{t-1} - bQ_{t-2} + I_0 \;;\; d.h.$$
$$Q_t - 2bQ_{t-1} + bQ_{t-2} = I_0$$

Inhomogene Differenzengleichung 2. Ordnung mit konstanter Störfunktion

Charakteristische Gleichung:

$m^2 - 2b\,m + b = 0$

$$m_{1,2} = b \pm \sqrt{b\cdot\underbrace{(b-1)}_{negativ}} \quad komplex$$

$$r^2 = b^2 + b\cdot(b-1) = 2b^2 - b < 1 \quad \text{für } 0<b<1$$

Lösung der homogenen Gleichung:

trigonometrisch, mit $r < 1$

Partikulärlösung der inhomogenen Gleichung:

$$Q^* = \frac{I_0}{1-2b+b} = \frac{I_0}{1-b}$$

Lösungsverhalten:

Q_t oszilliert in gedämpften Zyklen gegen den (stabilen) Wert $\frac{I_0}{1-b}$.

Anwendung 2: **Modifiziertes Akzeleratorprinzip**

Das folgende Modell stellt eine Variante des Modells von Samuelson dar:

Die Investitionsnachfrage setzt sich zusammen aus:

1.) einem Anteil proportional zum Zuwachs des Volkseinkommens,

2.) einem Anteil proportional zum Volkseinkommen selbst,

3.) einem vom Volkseinkommen unabhängigen Anteil A_t ("autonome Investition", bestimmt durch Kräfte ausserhalb des Systems).

Formal: $\quad I_t = b\,(Y_{t-1} - Y_{t-2}) + k\,Y_{t-1} + A_t\,; \qquad b > 0$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad k > 0$

Dabei wird vorausgesetzt, A_t sei bekannt.

Ist z. B. $\quad A_t = A_0\,(1 + g)^t$, so folgt aus

(i) $\quad Y_t = C_t + I_t$

(ii) $\quad C_t = a \cdot Y_{t-1}$

(iii) $\quad I_t = b\,(Y_{t-1} - Y_{t-2}) + k \cdot Y_{t-1} + A_0\,(1 + g)^t$

die Differenzengleichung

$$Y_t - (a + b + k) \cdot Y_{t-1} + b \cdot Y_{t-2} = A_0\,(1 + g)^t$$

Allgemeine Lösung:

$Y_t = c_1 \cdot m_1^{\,t} + c_2 \cdot m_2^{\,t} + c\,(1 + g)^t$,

wobei

$$m_{1,2} = \frac{a+b+k \pm \sqrt{(a+b+k)^2 - 4b}}{2}\;;$$

$$c = \frac{A_0\,(1+g)^2}{(1+g)^2 - (a+b+k)\,(1+g) + b}$$

Anwendung 3: Ein Beispiel aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung

A und B spielen gegeneinander. Bei jedem Zug gewinnt A von B mit Wahrscheinlichkeit p Fr. 1.-, B von A mit Wahrscheinlichkeit q = 1 - p Fr. 1.-.

A besitzt zu Beginn des Spieles a Franken,

B besitzt b Franken $\qquad a + b = N.$

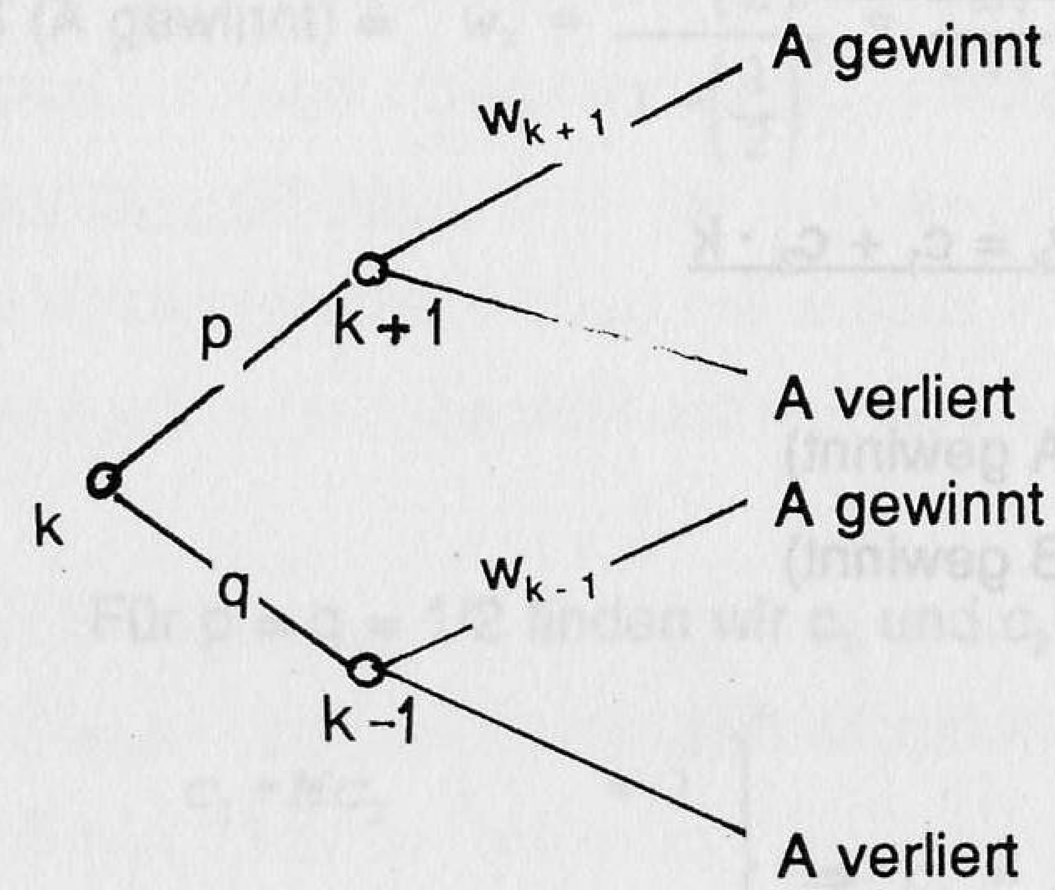
Das Spiel ist beendet, wenn einer von beiden M Franken besitzt.

$$\max(a,b) \le M \le N$$

Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass A gewinnt?

Es bezeichne w_k die Wahrscheinlichkeit, dass A gewinnt, falls er k Franken besitzt.

Für w_k gilt die folgende Rekursionsformel:



$$w_k = p\,w_{k+1} + q\,w_{k-1}$$

bzw. $$w_{k+1} = p\,w_{k+2} + q\,w_k$$

Wir ordnen um:

$$w_{k+2} - \frac{1}{p}\,w_{k+1} + \frac{q}{p}\,w_k = 0$$

homogene lineare Differenzengleichung 2. Ordnung.

Die zugehörige charakteristische Gleichung ist

$$m^2 - \frac{1}{p}\,m + \frac{q}{p} = 0$$

$$m_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4pq}}{2p} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4p(1-p)}}{2p}$$

$$= \frac{1 \pm \sqrt{(1-2p)^2}}{2p}$$

a) falls

$$p \neq q \qquad m_1 = 1 \qquad m_2 = \frac{q}{p}$$

$$\underline{w_k = c_1 + c_2 \left(\frac{q}{p}\right)^k}$$

b) falls $\quad p = q = 1/2 \qquad \underline{w_k = c_1 + c_2 \cdot k}$

Randbedingungen: $\quad w_M = 1 \quad$ (A gewinnt)

$\qquad w_{N-M} = 0 \quad$ (B gewinnt)

Im Fall a) folgt:

$$\left.\begin{aligned} 1 &= c_1 + c_2\left(\frac{q}{p}\right)^M \\ 0 &= c_1 + c_2\left(\frac{q}{p}\right)^{N-M} \end{aligned}\right\} \quad \frac{1-c_1}{-c_1} = \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^M}{\left(\frac{q}{p}\right)^{N-M}} = \left(\frac{q}{p}\right)^{2M-N}$$

$$\Rightarrow \qquad c_1 = \frac{1}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{2M-N}} \qquad c_2 = \frac{-\left(\frac{q}{p}\right)^{M-N}}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{2M-N}}$$

Lösung:

$$\underline{w_k = \frac{1}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{2M-N}} \left(1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{M-N+k}\right)}$$

<u>Zahlenbeispiel:</u>

$a = 7 \qquad b = 8 \qquad M = 10 \qquad N = 7 + 8 = 15$

$p = 2/3 \qquad q = 1/3 \qquad q/p = \underline{1/2}$

$$\text{WS (A gewinnt)} = \quad w_7 = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^5} = \frac{3/4}{31/32} = \underline{\frac{24}{31}}$$

b) Für $p = q = 1/2$ finden wir c_1 und c_2 aus den Randbedingungen wie folgt:

$$\left.\begin{aligned} c_1 + Mc_2 &= 1 \\ c_1 + (N-M)\,c_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad c_1 = \frac{N-M}{N-2M} \qquad c_2 = \frac{-1}{N-2M} = \frac{1}{2M-N}$$

$$w_k = c_1 + c_2 k = \frac{N-M-k}{N-2M} = \underline{\frac{M+k-N}{2M-N}}$$

Im Zahlenbeispiel

$$\text{WS (A gewinnt)} = \quad w_7 = \frac{10+7-15}{20-15} = \underline{\frac{2}{5}}$$

9. SYSTEME SIMULTANER DIFFERENZENGLEICHUNGEN

Im folgenden Abschnitt soll an zwei Beispielen erläutert werden, wie ein System von Differenzengleichungen 1. Ordnung gelöst werden kann. Für ein allgemeines lineares System von Differenzengleichungen werden wir eine Lösung in matrizieller Form herleiten. Ferner werden wir zeigen, dass eine lineare Differenzengleichung höherer Ordnung stets auf ein System simultaner linearer Differenzengleichungen 1. Ordnung zurückgeführt werden kann. Schliesslich werden wir eine qualitativ-graphische Methode einführen, mittels welcher sowohl lineare wie auch (gewisse) nichtlineare Systeme von Differenzengleichungen untersucht werden können.

Einführungsbeispiel:

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= -2x_t + 2y_t + 1 \\ y_{t+1} &= 5x_t + y_t + 10 \end{aligned} \qquad \text{Anfangsbedingungen:} \qquad \begin{aligned} x_0 &= 1 \\ y_0 &= 2 \end{aligned}$$

Mit dem folgendem Ansatz finden wir eine Partikulärlösung des inhomogenen Systems:

$$\begin{aligned} x_t &= c_1 = \text{konstant} \\ y_t &= c_2 = \text{konstant} \end{aligned}$$

Einsetzen:

$$\begin{aligned} c_1 &= -2c_1 + 2c_2 + 1 \\ c_2 &= 5c_1 + c_2 + 10 \end{aligned}$$

Lösung:

$$\begin{aligned} c_1 &= -2 \\ c_2 &= -7/2 \end{aligned}$$

Für die allgemeine Lösung des zugehörigen homogenen Systems

$$\text{(H)} \quad \begin{aligned} x_{t+1} &= -2x_t + 2y_t \\ y_{t+1} &= 5x_t + y_t \end{aligned}$$

versuchen wir den folgenden Ansatz

$$\begin{aligned} x_t &= nb^t \qquad b \neq 0 \\ y_t &= mb^t \end{aligned}$$

mit unbekannter Basis b. Durch Einsetzen finden wir

$$\begin{aligned} nb^{t+1} &= -2nb^t + 2mb^t \qquad | \; : b^t \\ mb^{t+1} &= 5nb^t + mb^t \qquad | \; : b^t \end{aligned}$$

Nach Division mit b^t erhalten wir die Bedingungen

$$\begin{aligned} nb &= -2n + 2m \\ mb &= 5n + m \end{aligned} \qquad \text{bzw.} \qquad \begin{aligned} (-2-b)n + 2m &= 0 \\ 5n + (1-b)m &= 0 \end{aligned}$$

Damit dieses Gleichungssystem eine Lösung $(n,m) \neq (0,0)$ besitzt, muss gelten:

$$Det \begin{pmatrix} -2-b & 2 \\ 5 & 1-b \end{pmatrix} = (-2-b)(1-b) - 10 = 0$$

d.h. $\quad b^2 + b - 12 = (b-3)(b+4) = 0$

Lösungen: $b_1 = 3, \quad b_2 = -4$

Durch Einsetzen von b_1 bzw. b_2 finden wir Gleichungssysteme für n und m

$$b_1: \quad \begin{aligned} 3n_1 &= -2n_1 + 2m_1 \\ 3m_1 &= 5n_1 + m_1 \\ 5n_1 &= 2m_1 \end{aligned} \qquad\qquad b_2: \quad \begin{aligned} -4n_2 &= -2n_2 + 2m_2 \\ -4m_2 &= 5n_2 + m_2 \\ n_2 &= -m_2 \end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung des Systems kann nun nach dem Superpositionsprinzip dargestellt werden als

$$\underline{x|_t = \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix} = a\,3^t \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} + b(-4)^t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3.5 \end{pmatrix} \; ; \quad a,b \in \mathbb{R} \text{ beliebig}}$$

Anfangsbedingungen:

$$\begin{aligned} x_0 &= 1 = 2a + b - 2 \\ y_0 &= 2 = 5a - b - 3.5 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} 2a + b &= 3 \qquad | \; -(-4) \\ \underline{5a - b} &\underline{= 5.5} \\ 7a &= 8.5 \end{aligned}$$

$$\underline{a = \frac{17}{14}} \qquad\qquad \underline{b = \frac{4}{7}}$$

$$\begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix} = \frac{17}{14} \cdot 3^t \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} + \frac{4}{7}(-4)^t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3.5 \end{pmatrix} \qquad t = 0,1,2,\ldots$$

Beispiel 2:

$$x_{t+1} = 3x_t - 5y_t$$
$$y_{t+1} = 2x_t - 3y_t$$

Der Ansatz

$$x_t = mb^t \qquad b \neq 0$$
$$y_t = nb^t$$

führt auf das Gleichungssystem

$$mb = 3m - 5n \quad \text{d.h.} \quad (3-b)m - 5n = 0$$
$$nb = 2m - 3n \qquad\qquad 2m - (b+3)n = 0$$

Damit dieses Gleichungssystem eine Lösung $(n,m) \neq (0,0)$ besitzt, muss gelten

$$Det\begin{pmatrix} 3-b & -5 \\ 2 & -3-b \end{pmatrix} = (3-b)(-3-b) + 10 = 0$$

$$b^2 + 1 = 0$$

Lösungen: $b_{1,2} = \pm\, i = \cos \pi/2 \pm i \sin \pi/2$

$$b = i: \quad m = \frac{3+i}{2}n \qquad\qquad b = -i: \quad m = \frac{3-i}{2}n$$

Mit $n = 2c$ ist $m = (3 + i)\,c$. Mit $n = 2d$ ist $m = (3 - i)\,d$.

(c, d beliebige komplexe Zahlen)

Die allgemeine <u>komplexe</u> Lösung des Systems kann dargestellt werden als

$$\begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix} = c\,i^t\begin{pmatrix} 3+i \\ 2 \end{pmatrix} + d(-i)^t\begin{pmatrix} 3-i \\ 2 \end{pmatrix}$$
$$= (c\,i^t + d(-i)^t)\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + (c\,i^{t+1} + d(-i)^{t+1})\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad t = 0, 1, 2, \ldots$$

Wir sind - im Hinblick auf ökonomische Anwendungen - nur an <u>reellen</u> Lösungen

interessiert. Setzen wir $c = \alpha + i\beta$, $d = \alpha - i\beta$, und beachten wir, dass

$$i^t = \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)$$

$$(-i)^t = \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)$$

so folgt

$$\begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix} = \left[2\alpha\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) - 2\beta\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)\right]\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \left[-2\beta\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) - 2\alpha\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)\right]\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

oder, wenn wir $A = 2\alpha$ und $B = 2\beta$ setzen, zusammengefasst:

$$x_t = (3A - B)\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) - (A + 3B)\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)$$
$$y_t = 2A\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) - 2B\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)$$

Matrizielle Darstellung der Lösung eines Systems simultaner linearer Differenzengleichungen

$$
\begin{aligned}
y_{t+1}^{(1)} &= a_{11}\, y_t^{(1)} + a_{12}\, y_t^{(2)} + \dots + a_{1n}\, y_t^{(n)} + b_1 \\
y_{t+1}^{(2)} &= a_{21}\, y_t^{(1)} + a_{22}\, y_t^{(2)} + \dots + a_{2n}\, y_t^{(n)} + b_2 \\
&\vdots \\
y_{t+1}^{(n)} &= a_{n1}\, y_t^{(1)} + a_{n2}\, y_t^{(2)} + \dots + a_{nn}\, y_t^{(n)} + b_n
\end{aligned}
$$

kann matriziell geschrieben werden als

$$y|_{t+1} = A\, y|_t + b|$$

Rekursiv finden wir

$$
\begin{aligned}
y|_1 &= A\, y|_0 + b| \\
y|_2 &= A\,(A\, y|_0 + b|) + b| = A^2\, y|_0 + A\, b| + b| \\
y|_3 &= A\,(A^2\, y|_0 + A\, b| + b|) + b| = A^3\, y|_0 + A^2\, b| + A\, b| + b| \\
&= A^3\, y|_0 + (A^2 + A + \mathrm{I})\, b| \\
&\vdots \\
y|_k &= A^k\, y|_0 + (A^{k-1} + A^{k-2} + \dots + \mathrm{I})\, b|
\end{aligned}
$$

Kann $S_k = A^{k-1} + A^{k-2} + \dots + \mathrm{I}$ vereinfacht geschrieben werden ?

Es ist

$$
\begin{aligned}
A\,S_k &= A^k + A^{k-1} + \dots + A \\
S_k - A\,S_k &= (\mathrm{I} - A)\,S_k = \mathrm{I} - A^k \\
S_k &= (\mathrm{I} - A)^{-1}(\mathrm{I} - A^k) \\
y|_k &= A^k\, y|_0 + (\mathrm{I} - A)^{-1}(\mathrm{I} - A^k)\, b| \\
&= A^k\, y|_0 + (\mathrm{I} - A)^{-1}\, b| - (\mathrm{I} - A)^{-1} A^k\, b|
\end{aligned}
$$

Lassen sich die Terme mit A^k zusammenfassen ?

Es ist $(\mathrm{I} - A)^{-1} A^k = A^k (\mathrm{I} - A)^{-1}$, denn

$$
\begin{aligned}
A^k &= A^k (\mathrm{I} - A)(\mathrm{I} - A)^{-1} = (A^k - A^{k+1})(\mathrm{I} - A)^{-1} \\
&= (\mathrm{I} - A)\, A^k (\mathrm{I} - A)^{-1} \\
A^k &= (\mathrm{I} - A)\, A^k (\mathrm{I} - A)^{-1} \quad \Big| \cdot (\mathrm{I} - A)^{-1} \text{ von links} \\
(\mathrm{I} - A)^{-1} A^k &= A^k (\mathrm{I} - A)^{-1}
\end{aligned}
$$

Falls $(\mathrm{I} - A)$ regulär ist, gilt somit

$$\underline{y|_k = A^k\,[y|_0 - (\mathrm{I} - A)^{-1}\, b|\,] + (\mathrm{I} - A)^{-1}\, b|}$$

Von Interesse ist die Frage nach stabilen Lösungen. Wir erwähnen ohne Beweis den

Satz: Eine hinreichende (aber nicht notwendige) Bedingung dafür, dass

$$A^k \longrightarrow 0 \qquad \text{für } k \to \infty$$

(wobei 0 die Nullmatrix), ist

1) alle $a_{ij} \ge 0$
2) alle Kolonnensummen der Matrix A sind < 1

Ergebnis: Unter obigen Bedingungen 1) und 2) gilt:

$$\underline{y|_k \longrightarrow (\mathrm{I} - A)^{-1}\, b| \qquad \text{für } k \to \infty}$$

Anwendung 1: Beispiel einer dynamischen Input-Output-Analyse

Wir betrachten die Verflechtung zweier Wirtschaftszweige "Kohle" und "Stahl". c_t bzw. s_t bezeichne die Produktion von Kohle bzw. Stahl in der Periode t, b_c und b_s den exogenen Verbrauch an Kohle und Stahl.

Modellgleichungen:

$$
\begin{aligned}
c_{t+1} &= a_{11}\, c_t + a_{12}\, s_t + b_c \\
s_{t+1} &= a_{21}\, c_t + a_{22}\, s_t + b_s
\end{aligned}
$$

Die Modellgleichungen besagen, dass die Produktion von Kohle bzw. Stahl eine lineare Funktion der Outputs an Kohle und Stahl der Vorperiode ist.

Mit

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad b| = \begin{pmatrix} b_c \\ b_s \end{pmatrix} \quad und \quad y|_t = \begin{pmatrix} c_t \\ s_t \end{pmatrix}$$

lässt sich das System schreiben als

$$y|_{t+1} = A\, y|_t + b|$$

Es gilt: $a_{ij} \geq 0$

$a_{11} + a_{21} < 1$

$a_{12} + a_{22} < 1$ (warum?)

und folglich können wir schliessen:

$$y|_t = A^t \left(y|_0 - y|^*\right) + y|^*$$

konvergiert für $t \to \infty$ gegen

$$y|^* = (I-A)^{-1}\, b| \;,$$

die (stabile) Gleichgewichtslösung.

Zahlenbeispiel:

$c_{t+1} = 0.1\, c_t + 0.5\, s_t + 10$

$s_{t+1} = 0.6\, c_t + 0.3\, s_t + 20$

$$A = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.5 \\ 0.6 & 0.3 \end{pmatrix} \qquad I-A = \begin{pmatrix} 0.9 & -0.5 \\ -0.6 & 0.7 \end{pmatrix}$$

$$(I-A)^{-1} = \frac{1}{0.33} \begin{pmatrix} 0.7 & 0.5 \\ 0.6 & 0.9 \end{pmatrix}$$

$$y|^* = \begin{pmatrix} 51.52 \\ 72.73 \end{pmatrix}$$

ist stabile Gleichgewichtslösung.

Anwendung 2: Multiplikatoreneffekt in einer offenen Volkswirtschaft

Wir betrachten ein 2-Länder-Modell:

Es bezeichne:

$Y_t^{(i)}$ das Volkseinkommen

$C_t^{(i)}$ den Konsum

$I_t^{(i)}$ die Investition

$X_t^{(i)}$ den Export

$M_t^{(i)}$ den Import des Landes i $\quad i = 1,2 \quad$ in der Periode t.

Das Modell unterstellt die folgenden Zusammenhänge:

(1) $Y_t^{(1)} = C_t^{(1)} + I_t^{(1)} + X_t^{(1)} - M_t^{(1)}$

$Y_t^{(2)} = C_t^{(2)} + I_t^{(2)} + X_t^{(2)} - M_t^{(2)}$

(2) $C_t^{(1)} = b_1\, Y_{t-1}^{(1)}$ $\qquad C_t^{(2)} = b_2\, Y_{t-1}^{(2)}$

(3) $I_t^{(1)} = I_0^{(1)} + h_1\, Y_{t-1}^{(1)}$ $\qquad I_t^{(2)} = I_0^{(2)} + h_2\, Y_{t-1}^{(2)}$

(4) $M_t^{(1)} = M_0^{(1)} + m_1\, Y_{t-1}^{(1)}$ $\qquad M_t^{(2)} = M_0^{(2)} + m_2\, Y_{t-1}^{(2)}$

(5) $X_t^{(1)} = M_t^{(2)}$ $\qquad X_t^{(2)} = M_t^{(1)}$

$0 < b_i\,,\; h_i\,,\; m_i < 1; \qquad (b_i + h_i + m_i = 1)$

Setzen wir (2), (3), (4), (5) in (1) ein, so finden wir das System von Differenzengleichungen

$Y_t^{(1)} = (b_1 + h_1 - m_1)\, Y_{t-1}^{(1)} + m_2\, Y_{t-1}^{(2)} + I_0^{(1)} - M_0^{(1)} + M_0^{(2)}$

$Y_t^{(2)} = m_1\, Y_{t-1}^{(1)} + (b_2 + h_2 - m_2)\, Y_{t-1}^{(2)} + I_0^{(2)} - M_0^{(2)} + M_0^{(1)}$

oder matriziell geschrieben:

$$Y|_t = A\, Y|_{t-1} + b| \;,$$

wobei

$$Y|_t = \begin{pmatrix} Y_t^{(1)} \\ Y_t^{(2)} \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} b_1 + h_1 - m_1 & m_2 \\ m_1 & b_2 + h_2 - m_2 \end{pmatrix}$$

$$b| = \begin{pmatrix} I_0^{(1)} - M_0^{(1)} + M_0^{(2)} \\ I_0^{(2)} - M_0^{(2)} + M_0^{(1)} \end{pmatrix}$$

Alle Elemente von A sind positiv, denn $b_i + h_i > m_i$ (in realistischen Modellen). Ferner sind die Spaltensummen

$$b_i + h_i - m_i + m_i = b_i + h_i < 1$$

Daher konvergiert

$$A^t \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und

$$Y|_t \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} (I-A)^{-1}\ b|$$

Lineare Differenzengleichungen höherer Ordnung

Eine Differenzengleichung n-ter Ordnung der Form

$$\circledast \qquad y_{k+n} + a_1 y_{k+n-1} + a_2 y_{k+n-2} + \ldots + a_n y_k = b$$

lässt sich auf ein System von linearen Differenzengleichungen 1. Ordnung zurückführen, wenn wir folgende Transformationen vornehmen:

$$\begin{aligned} y_k &= y_k^{(1)} \\ y_{k+1} &= y_k^{(2)} = y_{k+1}^{(1)} \\ y_{k+2} &= y_k^{(3)} = y_{k+1}^{(2)} \\ &\vdots \\ y_{k+n-1} &= y_k^{(n)} = y_{k+1}^{(n-1)} \\ y_{k+n} &= y_{k+1}^{(n)} \end{aligned}$$

Damit entspricht $\circledast$ dem folgenden System:

$$\begin{aligned} y_{k+1}^{(1)} &= y_k^{(2)} \\ y_{k+1}^{(2)} &= y_k^{(3)} \\ &\vdots \\ y_{k+1}^{(n-1)} &= y_k^{(n)} \\ y_{k+1}^{(n)} &= -a_n y_k^{(1)} - a_{n-1} y_k^{(2)} - a_{n-2} y_k^{(3)} \ldots - a_1 y_k^{(n)} + b \end{aligned}$$

$$y|_{k+1} = A\, y|_k + b|$$

wobei

$$y| = \begin{pmatrix} y^{(1)} \\ y^{(2)} \\ \vdots \\ y^{(n)} \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{pmatrix} \qquad b| = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b \end{pmatrix}$$

Beispiel:

$$y_{k+3} + 2\, y_{k+2} - y_{k+1} + 3\, y_k = 4$$

führt matriziell auf das System

$$y|_{k+1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & -2 \end{pmatrix} y|_k + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = A\,y|_k + b|$$

Es ist

$$(I-A)^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -3 & 3 & 1 \\ -3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad (I-A)^{-1}b| = \frac{4}{5}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

womit die Lösung matriziell geschrieben werden kann als

$$\underline{y|_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & -2 \end{pmatrix}^k \left(y|_0 - \frac{4}{5}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) + \frac{4}{5}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

10. NICHTLINEARE DIFFERENZENGLEICHUNGEN 1. ORDNUNG: GRAPHISCHE METHODE

Nicht-lineare Modelle werden aus verschiedenen wichtigen Gründen betrachtet:

1. Viele ökonomische Zusammenhänge sind nicht (auch nicht angenähert) linear.

2. Lineare Modelle konnten benutzt werden, um folgende Arten des Zeitverlaufs einer Grösse zu erklären:
   - monoton gedämpfter Verlauf oder exponentielles Wachstum
   - gedämpfte oder explosive Oszillation
   - gleichmässige Oszillation, falls die Modell-Parameter eine gewisse Gleichung exakt erfüllen.
     (A = -1 bei Differenzengleichungen 1. Ordnung, s. S. 71, bzw.
     r = 1 bei Differenzengleichungen 2. Ordnung, s. S. 73)
     In ökonomischen Modellen sind die Parameter aber stets Schätzwerte und als solche mit Fehlern behaftet, so dass man die obigen Bedingungen in der Praxis kaum je als erfüllt betrachten kann.

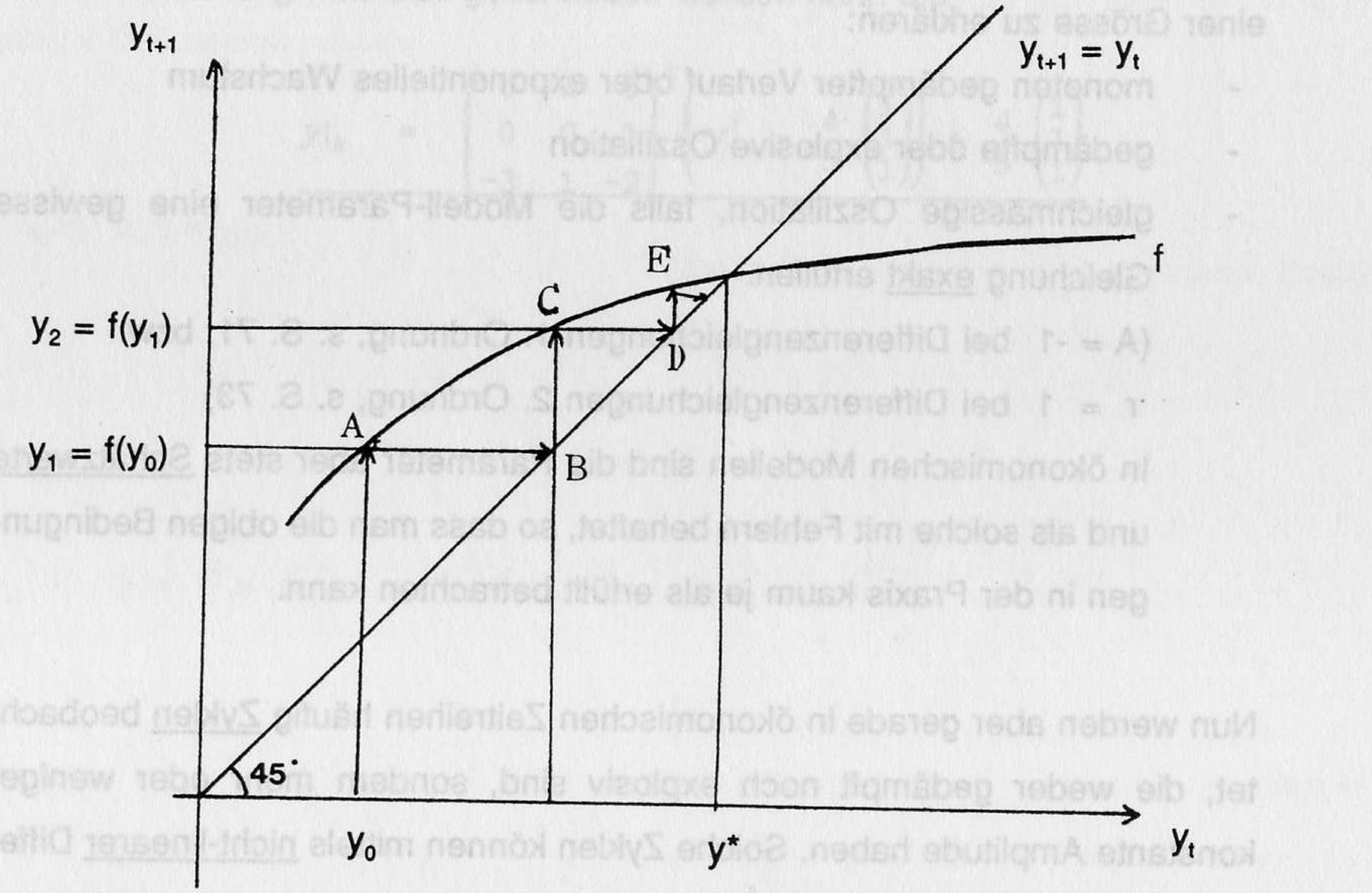
   Nun werden aber gerade in ökonomischen Zeitreihen häufig Zyklen beobachtet, die weder gedämpft noch explosiv sind, sondern mehr oder weniger konstante Amplitude haben. Solche Zyklen können mittels nicht-linearer Differenzengleichungen modellmässig erklärt werden.

3. Nicht-lineare Differenzengleichungen 1. Ordnung können unter Umständen auf Lösungsfolgen führen, die chaotisch sind, d.h. eine sensitive Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen (wie auch von Werten der Modellparameter) aufweisen. Längerfristige Vorhersagen sind dann unmöglich. Auf die Chaos-Theorie kann aber im Rahmen des vorliegenden Buches nicht eingegangen werden. Für eine korrekte mathematische Behandlung der Chaostheorie auf verständlichem Niveau verweisen wir auf Peitgen [5].

Qualitativ-graphische Methode: Das Phasendiagramm

Gegeben ist eine Differenzengleichung $y_{t+1} = f(y_t)$, wobei f eine beliebige Funktion ist.

Trägt man (y_t, y_{t+1}) in ein kartesisches Koordinatensystem ein, so lässt die graphische Darstellung von f - auch diese Darstellung wird wiederum **Phasendiagramm** genannt - eine Analyse der Differenzengleichung im folgenden Sinne zu:



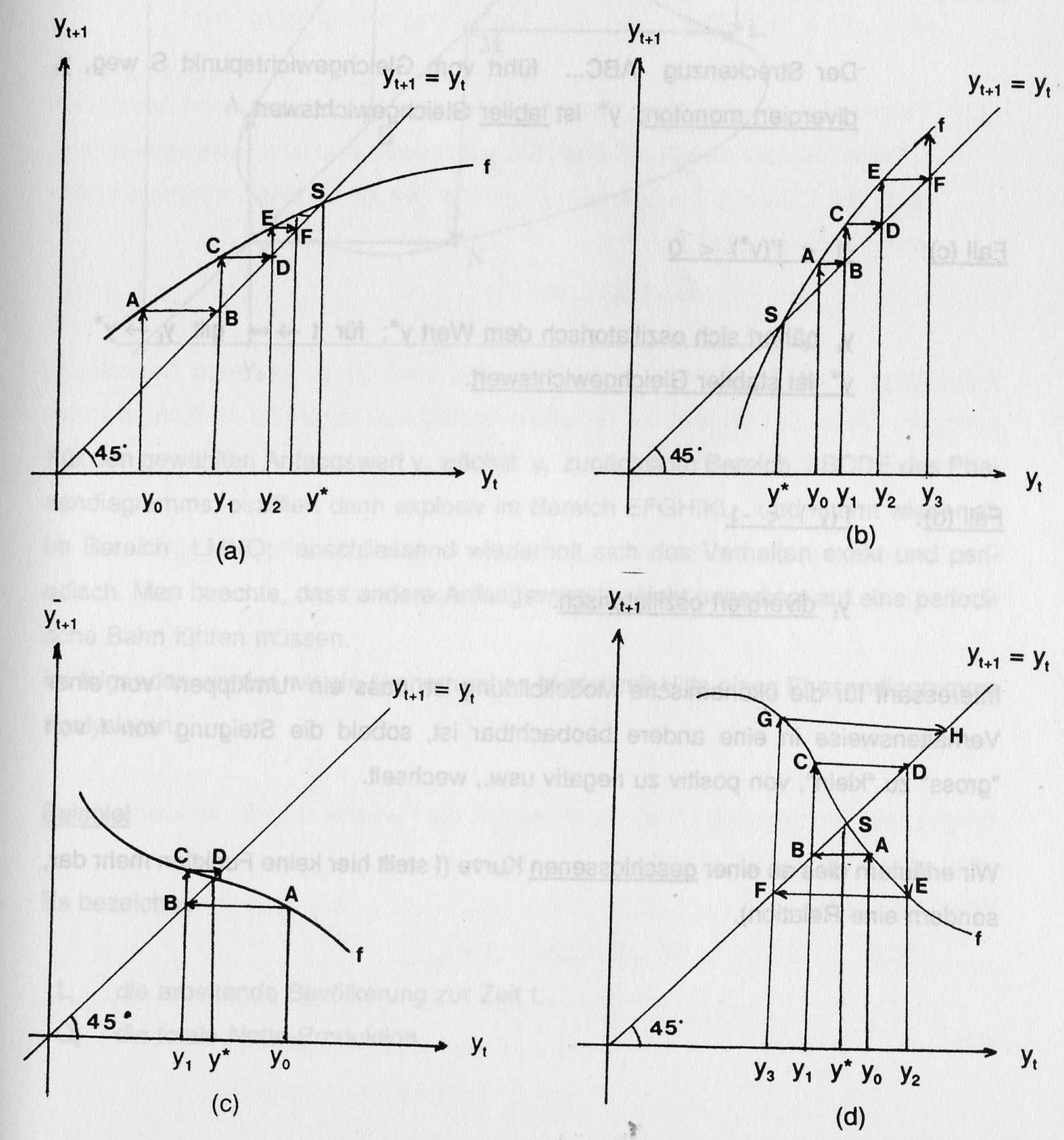
Ausgehend von einem Anfangswert y_0 findet man $y_1 = f(y_0)$ (Punkt A). Damit $y_2 = f(y_1)$ in gleicher Weise gefunden werden kann, übertragen wir zunächst in der Graphik den Wert von y_1 von der vertikalen auf die horizontale Achse, und benutzen dabei als Hilfsmittel die 45°-Gerade, welche die Gleichung $y_{t+1} = y_t$ erfüllt (Punkt B).

Dieser Prozess kann nun beliebig iteriert werden.

Bemerkung:

Die Schnittstelle y^* von f mit der 45°-Geraden ist Gleichgewichtswert der Differenzengleichung, denn es gilt: $f(y^*) = y^*$.

Wir betrachten einen Anfangswert y_0 in der Nähe von y^*. Es können nun vier verschiedene Verhaltensweisen in der Umgebung eines Gleichgewichts-Punktes beobachtet werden; sie unterscheiden sich durch die Steigung von f im Schnittpunkt $(y^*, f(y^*))$.



Fall (a): $0 < f'(y^*) < 1$

Der Streckenzug ABC... konvergiert monoton gegen den Punkt S, d.h. y_t konvergiert monoton gegen den stabilen Gleichgewichtswert y^*.

Fall (b): $f'(y^*) > 1$

Der Streckenzug ABC... führt vom Gleichgewichtspunkt S weg, y_t divergiert monoton; y^* ist labiler Gleichgewichtswert.

Fall (c): $-1 < f'(y^*) < 0$

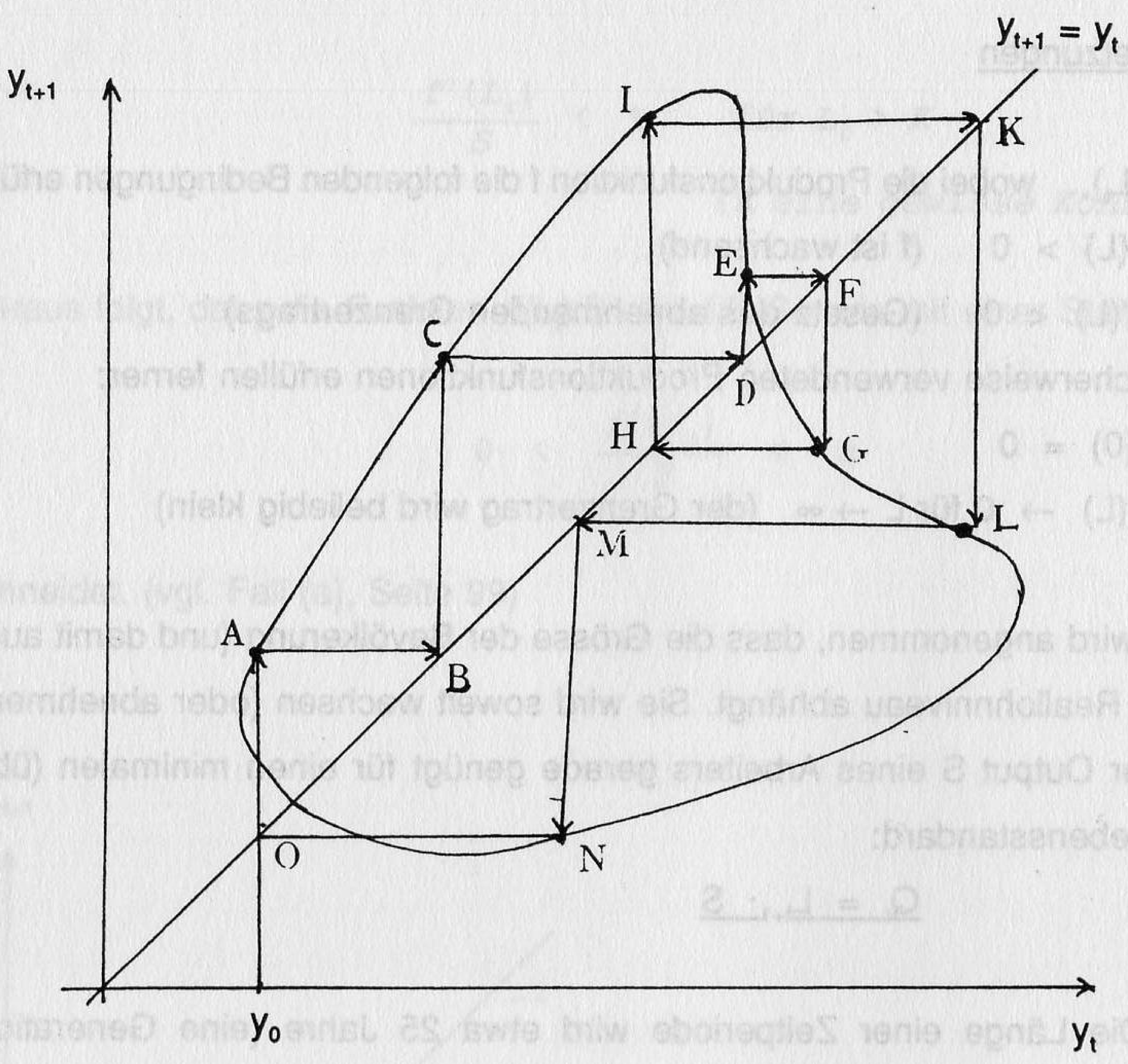
y_t nähert sich oszillatorisch dem Wert y^*; für $t \to \infty$ gilt $y_t \to y^*$. y^* ist stabiler Gleichgewichtswert.

Fall (d): $f'(y^*) < -1$

y_t divergiert oszillatorisch.

Interessant für die ökonomische Modellbildung ist, dass ein "Umkippen" von einer Verhaltensweise in eine andere beobachtbar ist, sobald die Steigung von f von "gross" zu "klein", von positiv zu negativ usw., wechselt.

Wir erläutern dies an einer geschlossenen Kurve (f stellt hier keine Funktion mehr dar, sondern eine Relation).



Für den gewählten Anfangswert y_0 wächst y_t zunächst im Bereich ABCDE des Phasendiagramms, oszilliert dann explosiv im Bereich EFGHIKL, und nimmt wieder ab im Bereich LMNO; anschliessend wiederholt sich das Verhalten exakt und periodisch. Man beachte, dass andere Anfangswerte y_0 nicht unbedingt auf eine periodische Bahn führen müssen.

Im folgenden werden wir ein ökonomisches Modell mit Hilfe eines Phasendiagramms analysieren.

Beispiel

Es bezeichne

L_t die arbeitende Bevölkerung zur Zeit t.

Q_t die totale Netto-Produktion

Modellvoraussetzungen

(1) $Q_t = f(L_t)$, wobei die Produktionsfunktion f die folgenden Bedingungen erfüllt:

a) $f'(L) > 0$ (f ist wachsend)

b) $f''(L) < 0$ (Gesetz des abnehmenden Grenzertrags)

Die üblicherweise verwendeten Produktionsfunktionen erfüllen ferner:

c) $f(0) = 0$

d) $f'(L) \to 0$ für $L \to \infty$ (der Grenzertrag wird beliebig klein)

(2) Ferner wird angenommen, dass die Grösse der Bevölkerung (und damit auch L_t) vom Reallohnniveau abhängt. Sie wird soweit wachsen (oder abnehmen), dass der Output S eines Arbeiters gerade genügt für einen minimalen (üblichen) Lebensstandard:

$$\underline{Q_t = L_{t+1} \cdot S}$$

Bemerkung: Die Länge einer Zeitperiode wird etwa 25 Jahre (eine Generation) betragen. Diese Zeit braucht die Bevölkerung, um sich veränderten ökonomischen Bedingungen anzupassen.

Die Gleichungen (1) und (2) führen auf folgende nicht-lineare Differenzengleichung für die zeitliche Entwicklung der arbeitenden Bevölkerung:

$$L_{t+1} = \frac{f(L_t)}{S}$$

Wegen den Bedingungen (1) a), b), c) verläuft die Funktion $f(L_t)/S$ für kleine Werte von L_t oberhalb der 45^0-Geraden.

Wegen (1) d) gilt

$$f'(L_t) < S \qquad \text{für } L_t \text{ genügend gross,}$$

d.h.

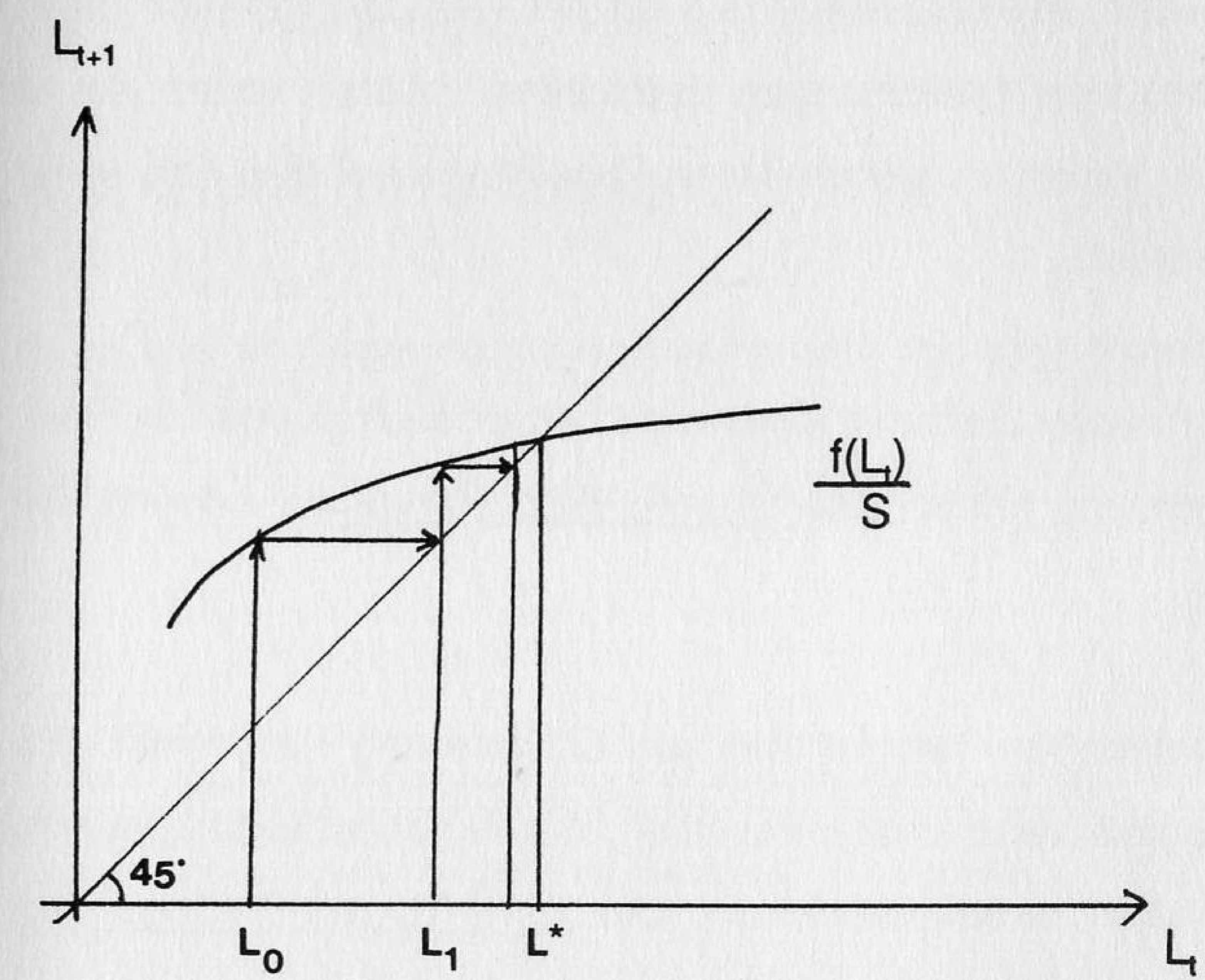
$$\frac{f'(L_t)}{S} < 1 \qquad \text{für } L_t > K$$

(K eine gewisse Konstante)

Daraus folgt, dass die Funktion $f(L_t)/S$ die 45^0-Gerade mit einer Steigung von

$$0 < \frac{f'(L_t)}{S} < 1$$

schneidet. (vgl. Fall (a), Seite 99)



Folgerung: L_t wächst monoton gegen den stabilen Grenzwert L^*, falls $L_0 < L^*$;
L_t nimmt monoton ab, falls $L_0 > L^*$.
L^* erfüllt die Gleichung $L^* \cdot S = f(L^*)$.

II. OPTIMIERUNGS-PROBLEME

11. EINLEITUNG. EXTREMA VON FUNKTIONEN MEHRERER VARIABLEN. EXTREMA UNTER NEBENBEDINGUNGEN IN FORM VON GLEICHUNGEN

Einleitung:

In der Oekonomie treten eine Vielfalt von Problemen der Optimierung auf. Besonders wichtig ist die Frage nach dem Maximum oder Minimum einer Funktion mehrerer Variablen (der sogenannten Zielfunktion) unter gewissen Nebenbedingungen. Die Nebenbedingungen können dabei die Form von Gleichungen oder Ungleichungen annehmen; die Zielfunktion wie auch die Nebenbedingungen können linear oder nicht-linear sein. Je nach Situation sind unterschiedliche Lösungsmethoden angezeigt.

In Kapitel 11 werden wir sowohl uneingeschränkte Extrema als auch Extrema unter **Nebenbedingungen in Form von Gleichungen** betrachten. Dabei sollen die in Band 1 für Funktionen zweier Variablen hergeleiteten Ergebnisse auf den Fall von n Variablen verallgemeinert werden.

In Kapitel 12 betrachten wir **lineare Zielfunktionen** und Nebenbedingungen in Form von **linearen Ungleichungen** und führen den Simplex-Algorithmus zur Lösung der linearen Optimierung ein.

In Kapitel 13 werden die Grundzüge der nichtlinearen Optimierung dargestellt: Die Zielfunktion ist eine beliebige (differenzierbare) Funktion, die Nebenbedingungen sind Ungleichungen, die nicht linear zu sein brauchen. Die Kuhn-Tucker-Bedingungen zeigen auf, wann eine Lösung existiert.

Weitere wichtige Optimierungsprobleme betreffen Fragestellungen, bei denen nur ganzzahlige Lösungen von Interesse sind ("Integer Programming"). Diese Fragen können wir im Rahmen des vorliegenden Bandes 3 nicht besprechen. Ebenfalls würde die Theorie der **dynamischen Optimierung**, bei welcher nach einem optimalen Zeitpfad gesucht wird (Variationsrechnung, "Optimal Control Theory") den Rahmen sprengen und muss hier unbehandelt bleiben.

Extrema von Funktionen mehrerer Variablen:

Extrema ohne Nebenbedingungen

(A) $z = f(x,y)$

	(lokales) Maximum	(lokales) Minimum
notwendige Bedingungen	$f_x = f_y = 0$	$f_x = f_y = 0$
hinreichende Bedingungen ⊛	$f_{xx} < 0$ $f_{xx} \cdot f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$	$f_{xx} > 0$ $f_{xx} \cdot f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$

⊛ Alle partiellen Ableitungen sind dabei an der Stelle auszuwerten, an welcher die notwendigen Bedingungen erfüllt sind.

Man beachte: Die Bedingung

$$f_{xx} \cdot f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$$

lässt sich in Determinantenschreibweise wie folgt darstellen:

$$\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} > 0$$

(B) Verallgemeinerung auf den n-Variablen-Fall

(für Herleitungen respektive Beweise verweisen wir z.B. auf Chiang [2])

Gegeben ist eine (zweimal stetig differenzierbare) Funktion

$$z = f(x_1, x_2, \ldots x_n)$$

Es bezeichne $f_i = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}$, $f_{ij} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$

$$|H_1| = f_{11} \quad |H_2| = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{vmatrix} \quad |H_3| = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{vmatrix} \quad \ldots .$$

$$|H| = |H_n| = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & \ldots & f_{1n} \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ f_{n1} & f_{n2} & \ldots & f_{nn} \end{vmatrix}$$

| H | wird Hesse'sche Determinante genannt.

Mit Hilfe dieser Determinanten lassen sich nun hinreichende Bedingungen für ein (lokales) Maximum oder Minimum formulieren.

	Maximum	Minimum
notwendige Bedingungen	$f_1 = f_2 = \ldots f_n = 0$	$f_1 = f_2 = \ldots f_n = 0$
hinreichende Bedingungen	$\|H_1\| < 0$ $\|H_2\| > 0$	$\|H_1\| > 0$ $\|H_2\| > 0 \ldots$
⊛	$\|H_3\| < 0 \ldots (-1)^n \|H_n\| > 0$	$\|H_n\| > 0$

Beispiel 1:

Gesucht sind Maxima / Minima der Funktion

$$z = f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 3x_2^2 + 6x_3^2 - 3x_1 x_2 + 4x_2 x_3$$

$f_1 = 2x_1 - 3x_2$

$f_2 = 6x_2 - 3x_1 + 4x_3$

$f_3 = 12x_3 + 4x_2$

$f_{11} = 2$	$f_{12} = -3$	$f_{13} = 0$
$f_{21} = -3$	$f_{22} = 6$	$f_{23} = 4$
$f_{31} = 0$	$f_{32} = 4$	$f_{33} = 12$

Notwendige Bedingungen:

$$\left.\begin{aligned} f_1 &= 2x_1 - 3x_2 = 0 \\ f_2 &= 6x_2 - 3x_1 + 4x_3 = 0 \\ f_3 &= 12x_3 + 4x_2 = 0 \end{aligned}\right\} \quad \textit{einzige Lösung: } x_1 = x_2 = x_3 = 0$$

$$|H_1| = f_{11} = 2 > 0$$

$$|H_2| = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} = 12 - 9 = 3 > 0$$

$$|H_3| = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 0 \\ -3 & 6 & 4 \\ 0 & 4 & 12 \end{vmatrix} = 144 - 32 - 108 = 4 > 0$$

Die hinreichenden Bedingungen für ein Minimum sind erfüllt.

$z = f(x_1, x_2, x_3)$ hat an der Stelle (0,0,0) ein Minimum.

Extrema unter Nebenbedingungen in Form von Gleichungen:

Methode der Lagrange-Multiplikatoren

(A) Gesucht ist ein (lokales) Maximum / Minimum der Funktion

$$z = f(x,y)$$

unter der Nebenbedingung

$$g(x,y) = b$$

Man bildet die Lagrange-Funktion

$$F(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda(b - g(x,y))$$

Notwendige Bedingungen für ein Extremum (vgl. Band 1, S. 212)

$$F_x = f_x - \lambda g_x = 0$$
$$F_y = f_y - \lambda g_y = 0$$
$$F_\lambda = b - g(x,y) = 0$$

Hinreichende Bedingung (vgl. Band 1, S. 217)

$$|\overline{H}| = \begin{vmatrix} 0 & g_x & g_y \\ g_x & F_{xx} & F_{xy} \\ g_y & F_{yx} & F_{yy} \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} > 0 \rightarrow \textit{Maximum} \\ < 0 \rightarrow \textit{Minimum} \end{matrix}$$

$|\overline{H}|$ heisst "erweiterte Hesse'sche Determinante".

Beispiel:

Gesucht ist das Maximum der Produktionsfunktion

$$Q = 10x^{1/3} y^{2/3}$$

unter der Budget-Restriktion

$$3x + 5y = 100$$

Lagrange-Funktion:

$$F(x, y, \lambda) = 10x^{1/3} y^{2/3} + \lambda(100 - 3x - 5y)$$

Notwendige Bedingungen für Maximum:

$$\left.\begin{aligned} F_x &= \frac{10}{3}x^{-2/3}y^{2/3} - 3\lambda = 0 \\ F_y &= \frac{20}{3}x^{1/3}y^{-1/3} - 5\lambda = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow y = \frac{6}{5}x$$

$$F_\lambda = 100 - 3x - 5y = 0 \Rightarrow \underline{x = \frac{100}{9}} \quad \underline{y = \frac{120}{9}}$$

Hinreichende Bedingungen:

$$F_{xx} = -\frac{20}{9}x^{-5/3}\,y^{2/3}\Big|_{\left(\frac{100}{9},\,\frac{120}{9}\right)} = -\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{6}{5}\right)^{2/3}$$

$$F_{xy} = F_{yx} = \frac{20}{9}x^{-2/3}\,y^{-1/3}\Big|_{\left(\frac{100}{9},\,\frac{120}{9}\right)} = \left(\frac{1}{5}\right)^{2/3}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^{1/3}$$

$$F_{yy} = -\frac{20}{9}x^{1/3}\,y^{-4/3}\Big|_{\left(\frac{100}{9},\,\frac{120}{9}\right)} = -\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{1/3}$$

$$g_x = 3$$
$$g_y = 5$$

$$|\overline{H}| = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 3 & -\frac{1}{5}\left(\frac{6}{5}\right)^{2/3} & \left(\frac{1}{5}\right)^{2/3}\left(\frac{1}{6}\right)^{1/3} \\ 5 & \left(\frac{1}{5}\right)^{2/3}\left(\frac{1}{6}\right)^{1/3} & -\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{1/3} \end{vmatrix}$$

$$= +15\cdot 2\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{2/3}\left(\frac{1}{6}\right)^{1/3} + 5\cdot\left(\frac{6}{5}\right)^{2/3} + 9\cdot\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{1/3} > 0$$

→ Q wird für $x = \frac{100}{9}$, $y = \frac{120}{9}$ maximal unter der vorgegebenen Budget-Restriktion.

(B) Erweiterung auf den Fall von n Variablen und m Nebenbedingungen (n > m)

Gesucht ist das Maximum / Minimum der Funktion

$$z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

unter den Nebenbedingungen

$$g^1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = b_1$$

$$g^2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = b_2$$

$$\vdots$$

$$g^m(x_1, x_2, \ldots, x_n) = b_m$$

Wir bilden die Lagrange-Funktion

$$F(x_1, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_m) = f(x_1, \ldots, x_n) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \left(b_i - g^i(x_1, \ldots, x_n)\right)$$

Notwendige Bedingung für ein Extremum:

$$\frac{\partial F}{\partial x_j} = F_j = f_j - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_j^i = 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, n$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda_i} = b_i - g^i(x_1, \ldots, x_n) = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, m$$

Zur Formulierung von hinreichenden Bedingungen bilden wir

$$|\overline{H}| = \left|\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & \ldots & 0 & g_1^1 & g_2^1 & \ldots & g_n^1 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & g_1^m & g_2^m & \ldots & g_n^m \\ \hline g_1^1 & g_1^2 & \ldots & g_1^m & F_{11} & F_{12} & \ldots & F_{1n} \\ g_2^1 & g_2^2 & \ldots & g_2^m & F_{21} & F_{22} & \ldots & F_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ g_n^1 & g_n^2 & \ldots & g_n^m & F_{n1} & F_{n2} & \ldots & F_{nn} \end{array}\right|$$

wobei $g_j^i = \dfrac{\partial g^i}{\partial x_j}$ und $F_{ij} = \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}$ bezeichnet.

$|\overline{H}_1|$, $|\overline{H}_2|$, ..., $|\overline{H}_n|$ bezeichne diejenigen Unterdeterminanten, welche F_{11} bzw. F_{22} ... bzw. F_{nn} als letztes Diagonal-Element aufweisen, z. B.

$$|\overline{H}_2| = \left|\begin{array}{cccc|cc} 0 & 0 & \ldots & 0 & g_1^1 & g_2^1 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & g_1^m & g_2^m \\ \hline g_1^1 & g_1^2 & \ldots & g_1^m & F_{11} & F_{12} \\ g_2^1 & g_2^2 & \ldots & g_2^m & F_{21} & F_{22} \end{array}\right|$$

Alle Ableitungen werden im stationären Punkt ⊛ ausgewertet.

Mit Hilfe der Unterdeterminanten $|\overline{H}_{m+1}|$, ... , $|\overline{H}_n|$ lassen sich nun <u>hinreichende Bedingungen</u> formulieren

- für ein <u>Maximum:</u>

  $|\overline{H}_{m+1}|$, $|\overline{H}_{m+2}|$, ... , $|\overline{H}_n|$ haben alternierende Vorzeichen, wobei

  $$sign\ (|\overline{H}_{m+1}|) = (-1)^{m+1} .$$

- für ein <u>Minimum:</u>

  $|\overline{H}_{m+1}|$, $|\overline{H}_{m+2}|$, ... , $|\overline{H}_n|$ haben alle das gleiche Vorzeichen, und zwar dasjenige von $(-1)^m$.

<u>Bemerkung:</u> Auch die oben behandelten Fälle von Extrema ohne Nebenbedingungen (m=0) oder von Extrema mit einer Nebenbedingung (m=1) sind als Grenzfälle im obigen Schema enthalten. (Vergewissern Sie sich von der Richtigkeit dieser Aussage!)

<u>Zusammenfassung:</u>

<u>Zielfunktion:</u> $z = f(x_1, \dots, x_n) \rightarrow$ Max / Min

<u>Nebenbedingung:</u> $g^i(x_1, \dots, x_n) = b_i$, $i = 1, \dots, m$

<u>Lagrange-Funktion:</u>

$$F(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m) = f(x_1, \dots, x_n) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \left(b_i - g^i(x_1, \dots, x_n)\right)$$

	Maximum	Minimum
Notwendige Bedingungen ⊛	$F_{x_1} = 0$, ... $F_{x_n} = 0$, $F_{\lambda_1} = 0$, ... $F_{\lambda_m} = 0$	$F_{x_1} = 0$, ... $F_{x_n} = 0$, $F_{\lambda_1} = 0$, ... $F_{\lambda_m} = 0$
Hinreichende Bedingungen (falls ⊛ erfüllt)	$|\overline{H}_{m+1}|, |\overline{H}_{m+2}|, \dots, |\overline{H}_n|$ alternierende Vorzeichen, sign $(|H_{m+1}|) = (-1)^{m+1}$	$|\overline{H}_{m+1}|, |\overline{H}_{m+2}|, \dots, |\overline{H}_n|$ gleiche Vorzeichen, nämlich dasjenige von $(-1)^m$

Beispiel:

Zielfunktion: $z = x_1^2 + x_2 x_3 + x_4^2$

Nebenbedingungen: $g^1(x_1, \dots, x_4) = x_1 + x_2 - 5 = 0$

$g^2(x_1, \dots, x_4) = x_1 - x_3 + x_4 + 1 = 0$

Frage:

Hat die Funktion z unter den obigen Nebenbedingungen ein Extremum? Man entscheide gegebenenfalls, ob es sich um ein Maximum oder Minimum handelt.

Lagrange-Funktion:

$F(x_1, x_2, x_3, x_4, \lambda_1, \lambda_2) = x_1^2 + x_2 x_3 + x_4^2 + \lambda_1(x_1 + x_2 - 5) + \lambda_2(x_1 - x_3 + x_4 + 1)$

$$F_{x_1} = 2x_1 + \lambda_1 + \lambda_2 = 0$$

$$F_{x_2} = x_3 + \lambda_1 = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda_1 = -x_3$$

$$F_{x_3} = x_2 - \lambda_2 = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda_2 = x_2$$

$$F_{x_4} = 2x_4 + \lambda_2 = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda_2 = -2x_4$$

$$F_{\lambda_1} = x_1 + x_2 - 5 = 0$$

$$F_{\lambda_2} = x_1 - x_3 + x_4 + 1 = 0$$

Lösung: $x_1 = 13 \qquad x_2 = -8 \qquad x_3 = 18 \qquad x_4 = 4$

Zur Entscheidung, ob die hinreichenden Bedingungen für ein Maximum oder Minimum erfüllt sind, betrachten wir die Determinanten $|\bar{H}| = |\bar{H}_4|$ *und* $|\bar{H}_3|$.

Dazu benötigen wir die zweiten Ableitungen:

$F_{11} = 2$	$F_{12} = 0$	$F_{13} = 0$	$F_{14} = 0$
$F_{21} = 0$	$F_{22} = 0$	$F_{23} = 1$	$F_{24} = 0$
$F_{31} = 0$	$F_{32} = 1$	$F_{33} = 0$	$F_{34} = 0$
$F_{41} = 0$	$F_{42} = 0$	$F_{43} = 0$	$F_{44} = 2$
$g_1^1 = 1$	$g_2^1 = 1$	$g_3^1 = 0$	$g_4^1 = 0$
$g_1^2 = 1$	$g_2^2 = 0$	$g_3^2 = -1$	$g_4^2 = 1$

$$|\bar{H}_4| = |\bar{H}| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -1$$

$$|\bar{H}_3| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Es ist $|\bar{H}_3| = 0$ und $|\bar{H}| < 0$, also sind die hinreichenden Bedingungen für ein Maximum oder Minimum an der Stelle (13, -8, 18, 4) nicht erfüllt.

12. LINEARE OPTIMIERUNG. DER SIMPLEX-ALGORITHMUS

1. Einleitung:

Die lineare Optimierung befasst sich mit dem Auffinden eines Maximums (Minimums) einer linearen Funktion

(1) $$Z = f(x_1, x_2, \dots, x_n) = p_1x_1 + p_2x_2 + \dots + p_nx_n$$

unter Nebenbedingungen, die die Form von linearen Ungleichungen annehmen:

(2)
$$\begin{array}{ll} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \le b_1 & (\ge b_1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \le b_2 & (\ge b_2) \\ \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \le b_m & (\ge b_m) \end{array}$$

Ferner sollen die Nicht-Negativitätsbedingungen

(3) $$x_i \ge 0\ ; \quad i = 1, 2, \dots, n$$

gelten.

In Matrix-Schreibweise kann das Problem wie folgt dargestellt werden:

Es bezeichne:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \cdot & & \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad x| = \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix} \qquad p| = \begin{pmatrix} p_1 \\ \cdot \\ p_n \end{pmatrix} \qquad b| = \begin{pmatrix} b_1 \\ \cdot \\ b_m \end{pmatrix}$$

Zielfunktion:

$$Z = f(x|) = \overline{p}\, x| \quad \rightarrow \quad Max\ (Min)$$

Nebenbedingungen:

$$A\,x| \le b| \qquad (\ge b|)$$

Nicht-Negativitätsbedingungen:

$$x| \ge 0|$$

Einführungsbeispiel:

(1) $$Z = f\,(x_1, x_2, x_3) = 2x_1 + x_2 + 3x_3 \quad \rightarrow \quad Max\ ,$$

wobei

(2)
$$\begin{array}{l} x_1 \le 2 \\ x_2 \le 5 \\ x_1 + x_3 \le 3 \\ x_2 + 5x_3 \le 10 \end{array}$$

(3) $$x_1\ ,\ x_2\ ,\ x_3 \ \ge\ 0$$

In Band 1, S. 44 ff. haben wir eine graphische Methode kennengelernt, um entsprechende Probleme im Falle zweier Variablen x_1, x_2 zu lösen.

Die graphische Methode lässt sich nur beschränkt auf den Fall von 3 Variablen und nicht auf den Fall von mehr als 3 Variablen übertragen. Dennoch lassen die dort erarbeiteten Ideen gewisse Analogien zu.

1. Ueberlegung: Gebiet der zulässigen Lösungen.

Jede Gleichung

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = b_i\,, \qquad i = 1, \ldots, m$$

respektive $\qquad x_j = 0\,, \quad j = 1, \ldots, n\,,$

stellt eine "Hyperebene" im Raum $\mathbb{R}^n$ dar (für n = 3: eine Ebene in $\mathbb{R}^3$); die Ungleichung

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \le b_i$$

respektive $\qquad x_j \ge 0$

beschreibt einen durch die entsprechende Hyperebene begrenzten Halbraum.

Alle Bedingungen (2) und (3) zusammen grenzen eine konvexe, durch Hyperebenen begrenzte Menge in $\mathbb{R}^n$ ab. Eine solche Menge nennt man Simplex.

Im Einführungsbeispiel:

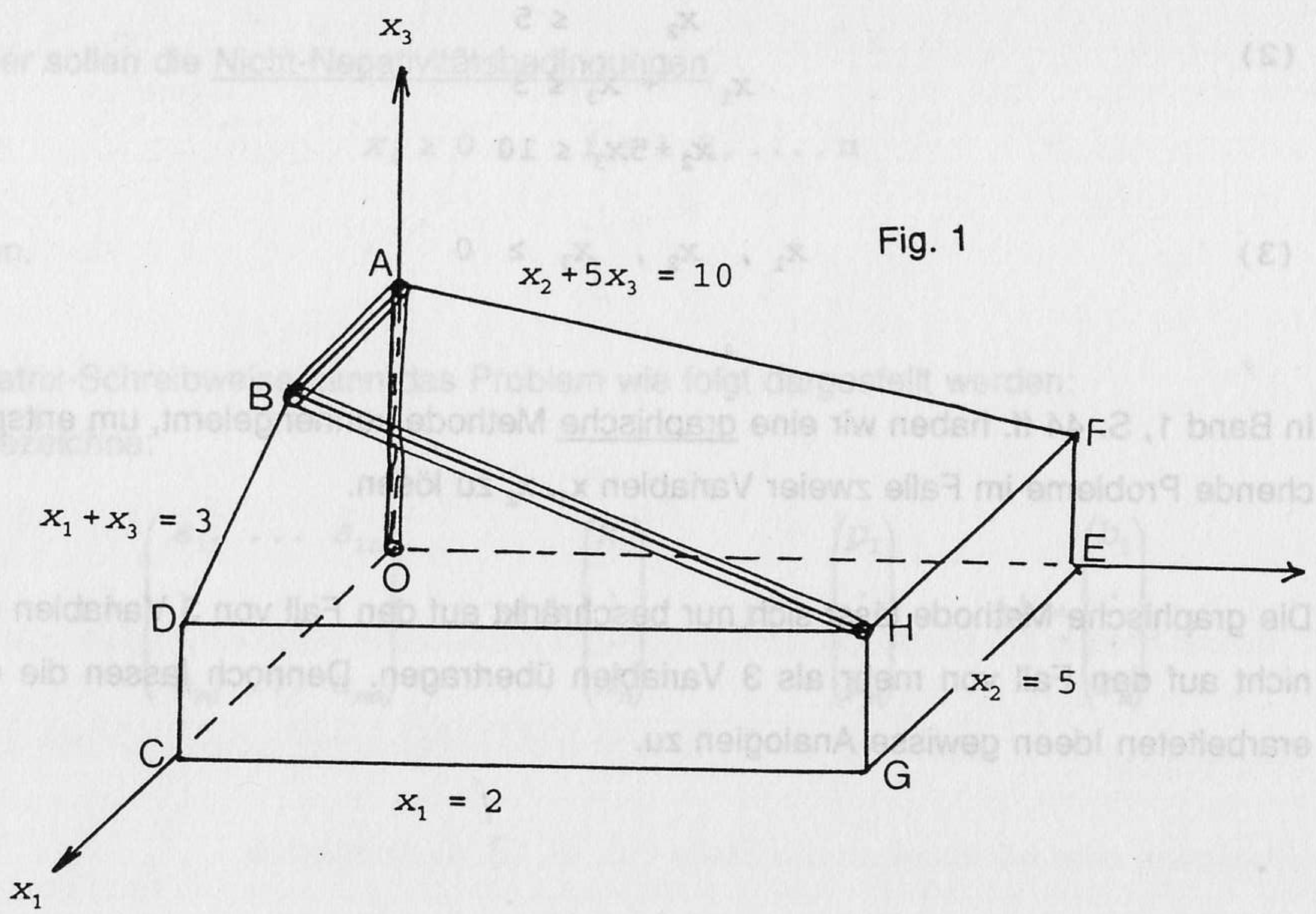


Fig. 1

2. Ueberlegung:

Flächen mit der Gleichung

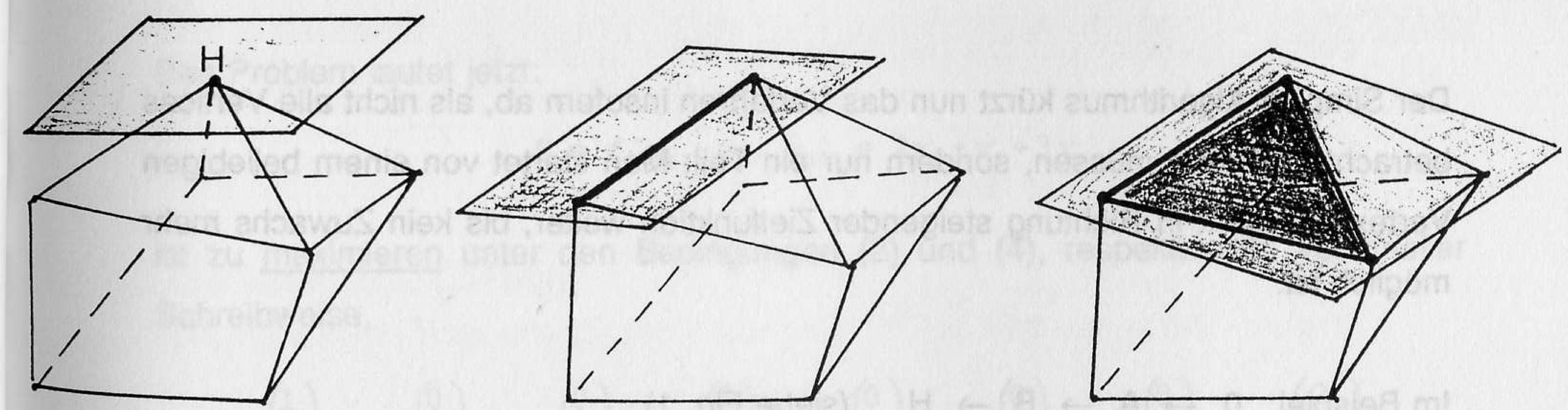
$$f(x_1, \ldots, x_n) = p_1x_1 + \ldots + p_nx_n = k = konstant$$

stellen eine Schar paralleler Hyperebenen dar.

Es ist unmittelbar evident, dass die Funktion $Z = f(x_1, \ldots, x_n)$ ihr Maximum dort annimmt, wo eine der Hyperebenen aus der Schar auf der Begrenzungsfläche des Gebietes der zulässigen Lösungen aufliegt (in einem Punkt, einer Strecke, einer Fläche, bzw. einer Hyperfläche).

Illustration:

Fig. 2



Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir uns bei der Suche nach "Kandidaten" für das Maximum auf die Eckpunkte (Vertices) der zulässigen Lösungsmenge beschränken.

Im Beispiel:

Vertex	(x_1, x_2, x_3)	Wert der Zielfunktion $2x_1 + x_2 + 3x_3$
0	(0, 0, 0)	0
A	(0, 0, 2)	6
B	(1, 0, 2)	8
C	(2, 0, 0)	4
D	(2, 0, 1)	7
E	(0, 5, 0)	5
F	(0, 5, 1)	8
G	(2, 5, 0)	9
H	(2, 5, 1)	12 ← Maximum

Der Simplex-Algorithmus kürzt nun das Verfahren insofern ab, als nicht alle Vertices betrachtet werden müssen, sondern nur ein Teil: Man startet von einem beliebigen Vertex und geht in Richtung steigender Zielfunktion weiter, bis kein Zuwachs mehr möglich ist.

Im Beispiel: 0 → A → B → H (siehe Fig. 1)

Im folgenden Abschnitt wollen wir die praktische Durchführung dieses Algorithmus kennenlernen.

2. Herleitung des Simplex-Algorithmus

Es ist einfacher, mit Gleichungen anstatt Ungleichungen zu arbeiten. Wir können diese Vereinfachung erreichen durch Einführung sogenannter Schlupfvariablen.

Im Beispiel:

$$(2)\quad \left\{\begin{array}{lcl} x_1 \le 2 & \Leftrightarrow & x_1 + s_1 = 2 \\ x_2 \le 5 & \Leftrightarrow & x_2 + s_2 = 5 \\ x_1 + x_3 \le 3 & \Leftrightarrow & x_1 + x_3 + s_3 = 3 \\ x_2 + 5x_3 \le 10 & \Leftrightarrow & x_2 + 5x_3 + s_4 = 10 \end{array}\right\}$$

wobei

$$(4)\quad s_1 \ge 0\ ,\quad s_2 \ge 0\ ,\quad s_3 \ge 0\ ,\quad s_4 \ge 0$$

Allgemein betrachtet man m nicht-negative Schlupfvariablen $s_1, s_2, \ldots, s_m$ (je eine pro Ungleichung).

Das Problem lautet jetzt:

$$Z = f(x_1,\ x_2,\ x_3) = 2x_1 + x_2 + 3x_3$$

ist zu maximieren unter den Bedingungen (2) und (4), respektive, in vektorieller Schreibweise,

$$(5)\quad \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix} x_2 + \begin{pmatrix}0\\0\\1\\5\end{pmatrix} x_3 + \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} s_1 + \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} s_2 + \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} s_3 + \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} s_4 = \begin{pmatrix}2\\5\\3\\10\end{pmatrix}$$

wobei

$$(6)\quad x_1,\ x_2,\ x_3,\ s_1,\ s_2,\ s_3,\ s_4 \ge 0$$

Man beachte:

Jeder Vertex kann aufgefasst werden als Schnitt von (mindestens) drei Ebenen (allgemein: von (mind.) n Hyperebenen). Jede Ebene des Simplex zeichnet sich dadurch aus, dass eine der Variablen x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3, s_4 Null gesetzt wird, jeder Vertex als Schnitt dreier Ebenen dadurch, dass drei der Variablen (allgemein: n der Variablen x_1, ..., x_n, s_1, ..., s_m) Null sind.

Allerdings liefert nicht jede Wahl von drei Variablen, die man Null setzt, auch einen Vertex.

Einschränkende Bedingungen

a) Damit die Gleichung (5) lösbar ist, müssen die verbleibenden Vektoren linear unabhängig sein.
So führt z.B. die Wahl x_2=0, x_3=0, s_2=0 auf die Vektorgleichung

$$\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} s_1 + \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} s_3 + \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} s_4 = \begin{pmatrix}2\\5\\3\\10\end{pmatrix}$$

beziehungsweise auf das (nicht-lösbare) Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + s_1 &= 2 \\ 0 &= 5 \quad \leftrightarrow \quad \textit{Widerspruch} \\ x_1 + s_3 &= 3 \\ s_4 &= 10 \end{aligned}$$

b) Eine zulässige Lösung zeichnet sich dadurch aus, dass alle x_i, $s_j \geq 0$ sind.
Setzt man z. B. x_1=0, x_3=0, s_4=0, so resultiert die vektorielle Gleichung

$$\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix} x_2 + \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} s_1 + \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} s_2 + \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} s_3 = \begin{pmatrix}2\\5\\3\\10\end{pmatrix},$$

beziehungsweise das (eindeutig lösbare) Gleichungssystem

$$\begin{aligned} s_1 &= 2 \\ x_2 + s_2 &= 5 \\ s_3 &= 3 \\ x_2 &= 10 \end{aligned}$$

Die Lösung x_2 = 10, s_1 = 2, s_2 = -5, s_3 = 3 erfüllt aber die Nicht-Negativitätsbedingungen (6) nicht!

Der Simplex-Algorithmus ist nun eine schematisierte Rechenmethode, welche erlaubt, so von Vertex zu Vertex des Gebietes der zulässigen Lösungen voranzuschreiten, dass

(i) in jedem Schritt der Wert der Zielfunktion möglichst stark zunimmt,

(ii) in jedem Schritt einer der Basisvektoren von (5) gegen einen der anderen Vektoren ausgetauscht wird, und zwar so, dass die verbleibenden Vektoren linear unabhängig sind, also wiederum eine Basis bilden,

(iii) bei obigem Austauschprozess stets gewährleistet ist, dass die Nicht-Negativitätsbedingungen erfüllt sind.

Praktische Durchführung:

Die vektorielle Gleichung (5) kann schematisch wie folgt dargestellt werden:

x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	s_4	
1	0	0	1	0	0	0	2
0	1	0	0	1	0	0	5
1	0	1	0	0	1	0	3
0	1	5	0	0	0	1	10

Im Simplex-Tableau wird diesem Schema noch eine weitere Spalte und Zeile zugefügt, und damit die Zielfunktion festgehalten:

(7)

Z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	s_4	
0	1	0	0	1	0	0	0	2
0	0	1	0	0	1	0	0	5
0	1	0	1	0	0	1	0	3
0	0	1	5	0	0	0	1	10
1	-2	-1	-3	0	0	0	0	0

Interpretation der letzten Zeile:

$$1 \cdot Z - 2 \cdot x_1 - 1 \cdot x_2 - 3 \cdot x_3 + 0 \cdot s_1 + 0 \cdot s_2 + 0 \cdot s_3 + 0 \cdot s_4 = 0$$

bzw.

$$Z = 2x_1 + x_2 + 3x_3$$

1. Schritt

Eine naheliegende Wahl einer ersten Basis ist

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

d.h. die Werte x_1, x_2, x_3 werden 0 gesetzt. Man findet dann $s_1 = 2$, $s_2 = 5$, $s_3 = 3$, $s_4 = 10$; der zugehörige Wert der Zielfunktion ist 0.

Welcher Vektor ("Pivot-Spalte") soll neu in die Basis aufgenommen werden?

x_3 tritt in der Zielfunktion mit dem grössten Koeffizienten auf; x_3 ins Spiel zu bringen, verspricht grösstmöglichen Zuwachs der Zielfunktion.

Allgemein:

Die am stärksten negative Zahl der letzten Zeile im Simplex-Tableau bestimmt die "Pivot-Spalte".

Welcher der ursprünglichen Basisvektoren soll eliminiert werden?

Gewährleistet muss sein, dass alle Nicht-Negativitätsbedingungen erfüllt sind. Dies wird folgendermassen erreicht:

Man teilt die Elemente der Spalte rechts durch die entsprechenden positiven Elemente der Pivot-Spalte.

Der kleinste resultierende Quotient bestimmt dabei das "Pivot-Element", im Beispiel das eingekreiste Element 5 .

Z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	s_4		
0	1	0	0	1	0	0	0	2	
0	0	1	0	0	1	0	0	5	
0	1	0	1	0	0	1	0	3	3:1 = 3
0	0	1	5	0	0	0	1	10	10:5 = 2
1	-2	-1	-3	0	0	0	0	0	

Nun formen wir unser Schema (Gleichungssystem) mit Hilfe des Gauss'schen Algorithmus so um, dass aus der Pivot-Spalte ein Einheitsvektor wird, wobei das Pivot-Element in 1, alle andern Elemente in 0 übergehen sollen.

Durchführung:

	Z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	s_4		
	0	1	0	**0**	1	0	0	0	2	2:1=2
	0	0	1	**0**	0	1	0	0	5	
III-1/5 IV	0	1	-1/5	**0**	0	0	1	-1/5	1	1:1=1
1/5 IV	0	0	1/5	**1**	0	0	0	1/5	2	
V+3/5 IV	1	-2	-2/5	**0**	0	0	0	3/5	6	

Beachte: Mit $x_1 = x_2 = s_4 = 0$ lässt sich aus der letzten Zeile ablesen, dass der Wert der Zielfunktion auf Z=6 zugenommen hat.

2. Schritt

Pivot-Spalte: Da -2 die am stärksten negative Zahl der letzten Zeile ist, wählt man die entsprechende x_1-Spalte als Pivot-Spalte.

Pivot-Zeile: Die "Regel des kleinsten Quotienten" ergibt für die 3. Zeile den kleinsten positiven Wert.

	Z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	s_4		
I-III	0	**0**	1/5	0	1	0	-1	1/5	1	1:1/5=5
	0	**0**	1	0	0	1	0	0	5	5:1 =5 ←
	0	**1**	-1/5	0	0	0	1	-1/5	1	
	0	**0**	1/5	1	0	0	0	1/5	2	
V+2III	1	**0**	-4/5	0	0	0	2	1/5	8	

Der Wert der Zielfunktion lässt sich nun (mit $x_2 = 0$, $s_3 = 0$, $s_4 = 0$) als 8 ablesen.

3. Schritt

Pivot-Spalte: Einziges negatives Element der letzten Zeile ist -4/5.

Die "Regel des kleinsten Quotienten" liefert zwei gleich grosse Quotienten. Wir wählen z.B. die 2. Zeile als Pivot-Zeile.

Z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	s_4	
0	0	**0**	0	1	-1/5	-1	1/5	0
0	0	**1**	0	0	1	0	0	5
0	1	**0**	0	0	1/5	1	-1/5	2
0	0	**0**	1	0	-1/5	0	1/5	1
1	0	**0**	0	0	4/5	2	1/5	12

Ergebnis: Mit $s_2 = 0$, $s_3 = 0$, $s_4 = 0$ findet man: $s_1 = 0$, $x_1 = 2$, $x_2 = 5$, $x_3 = 1$ und $Z = f_{max} = 12$.

Bemerkung: Wir beschränken uns hier auf den Fall einer zu maximierenden Zielfunktion. Für die nötige Adaption bei einer zu minimierenden Zielfunktion vergleiche man z.B. Chiang [2].

3. Beispiele

1) Gesucht ist das Maximum der Funktion $Z = 2x + 3y$, unter den Nebenbedingungen

$$x + 4y \leq 9$$
$$2x + y \leq 4$$

$$x, y \geq 0$$

Wir führen die Schlupfvariablen u und v ein:

$$x + 4y + u = 9$$
$$2x + y + v = 4$$

$$x, y, u, v \geq 0$$

Simplex-Tableau: (Eingekreist ist jeweils das Pivot-Element)

Z	x	y	u	v		
0	1	4	1	0	9	9:4 = 2.25 ←
0	2	1	0	1	4	4:1 = 4
1	-2	-3	0	0	0	

Z	x	y	u	v		
0	1/4	1	1/4	0	9/4	9/4:1/4 = 9
0	7/4	0	-1/4	1	7/4	7/4:7/4 = <u>1</u> ←
1	-5/4	0	3/4	0	27/4	

Z	x	y	u	v	
0	0	1	2/7	-1/7	2
0	1	0	-1/7	4/7	1
1	0	0	4/7	5/7	8

Die letzte Zeile enthält keine negativen Koeffizienten mehr

$\Rightarrow$ Z kann nicht mehr vergrössert werden.

Interpretation der letzten Zeile:

$$Z + 4/7\, u + 5/7\, v = 8$$

Mit $u = 0$ $\quad v = 0$: $\quad Z_{Max} = 8$

$\underline{x = 1}$ $\quad \underline{y = 2}$

(Man löse dieselbe Aufgabe auch graphisch!)

2) Gesucht ist das Maximum der Funktion

(1) $Z = f(x_1, x_2, x_3) = x_1 + 2x_2 - x_3$

Unter den Nebenbedingungen

(2) $2x_1 + x_2 + x_3 \leq 4$
$\quad x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 5$

(3) $x_1, x_2, x_3 \geq 0$

Schlupfvariablen: $s_1, s_2 \geq 0$

Nebenbedingungen (2) in Form von Gleichungen:

$$2x_1 + x_2 + x_3 + s_1 = 4$$
$$x_1 + 4x_2 + 2x_3 + s_2 = 5$$

Simplex - Tableau:

Z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2		
I: 0	2	1	1	1	0	4	4:1 = 4
II: 0	1	4	2	0	1	5	5:4 = 1.25 ←
III: 1	-1	-2	1	0	0	0	

Z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2		
I-1/4II: 0	7/4	0	1/2	1	-1/4	11/4	11/4:7/4 = 11/7 ←
1/4II: 0	1/4	1	1/2	0	1/4	5/4	5/4:1/4 = 5
III+2/4II:1	-1/2	0	2	0	1/2	5/2	

Z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	
0	1	0	2/7	4/7	-1/7	11/7
0	0	1	3/7	-1/7	2/7	6/7
1	0	0	15/7	2/7	3/7	23/7

Die letzte Zeile weist keine negativen Elemente mehr auf, d.h. Z kann nicht mehr vergrössert werden.

Lösung: $x_3 = 0$ $\quad s_1 = 0$ $\quad s_2 = 0$

$x_1 = 11/7$ $\quad x_2 = 6/7$ $\quad Z_{max} = 23/7$

3) Man maximiere

$Z = f(x_1, x_2, x_3) = 6x_1 + 2x_2 + 5x_3$

unter den Nebenbedingungen

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 10$$
$$x_1 + \quad + 2x_3 \leq 8$$
$$x_1 + 2x_2 + 5x_3 \leq 19$$
$$x_2 \leq 0$$

und $x_1, x_2, x_3 \geq 0$

Lösung: Schlupfvariablen: $s_1, s_2, s_3, s_4 \geq 0$

Simplex - Tableau:

Z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	s_4		
I: 0	2	3	1	1	0	0	0	10	10:2 = 5 ←
II: 0	1	0	2	0	1	0	0	8	8:1 = 8
III: 0	1	2	5	0	0	1	0	19	19:1 = 19
IV: 0	0	1	0	0	0	0	1	6	
1	-6	-2	-5	0	0	0	0	0	

Z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	s_4		
1/2I:0	1	3/2	1/2	1/2	0	0	0	5	5:1/2=10
II-1/2I:0	0	-3/2	3/2	-1/2	1	0	0	3	3:3/2= 2 ←
III-1/2I:0	0	1/2	9/2	-1/2	0	1	0	14	14:9/2=28/9
IV:0	0	1	0	0	0	0	1	6	
1	0	7	-2	3	0	0	0	30	

Z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	s_4	
0	1	2	0	2/3	-1/3	0	0	4
0	0	-1	1	-1/3	2/3	0	0	2
0	0	5	0	1	-3	1	0	5
0	0	1	0	0	0	0	1	6
1	0	5	0	7/3	4/3	0	0	34

Lösung: $x_2 = 0$ $\quad s_1 = 0$ $\quad s_2 = 0$

$x_1 = 4$ $\quad x_3 = 2$ $\quad Z_{max} = 34$

13. NICHT-LINEARE OPTIMIERUNG. KUHN-TUCKER BEDINGUNGEN

Problemstellung:

(A) Gesucht ist ein Maximum der Funktion

$$z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

unter den Nebenbedingungen

$$g^1(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq r_1$$
$$g^2(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq r_2$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$
$$g^m(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq r_m$$

und den Nicht-Negativitätsbedingungen

$$x_j \geq 0, \qquad j = 1, 2, \dots n$$

Vektoriell geschrieben:

Maximiere $z = f(\overline{x})$

wobei $g^i(\overline{x}) \leq r_i, \quad i = 1, 2, \dots m$

und $x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots n$

(B) Gesucht ist das Minimum der Funktion

$$z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

unter den Nebenbedingungen

$$g^1(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq r_1$$
$$g^2(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq r_2$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$
$$g^m(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq r_m$$

und den Nicht-Negativitätsbedingungen

$$x_j \geq 0, \qquad j = 1, 2, \dots n$$

Vektoriell geschrieben:

Minimiere $z = f(\overline{x})$

wobei $g^i(\overline{x}) \geq r_i, \quad i = 1, 2, \dots m$

und $x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots n$

Um einige grundlegende Unterschiede zur linearen Optimierung festzustellen, betrachten wir zunächst einige Beispiele in zwei Variablen, die wir graphisch lösen können.

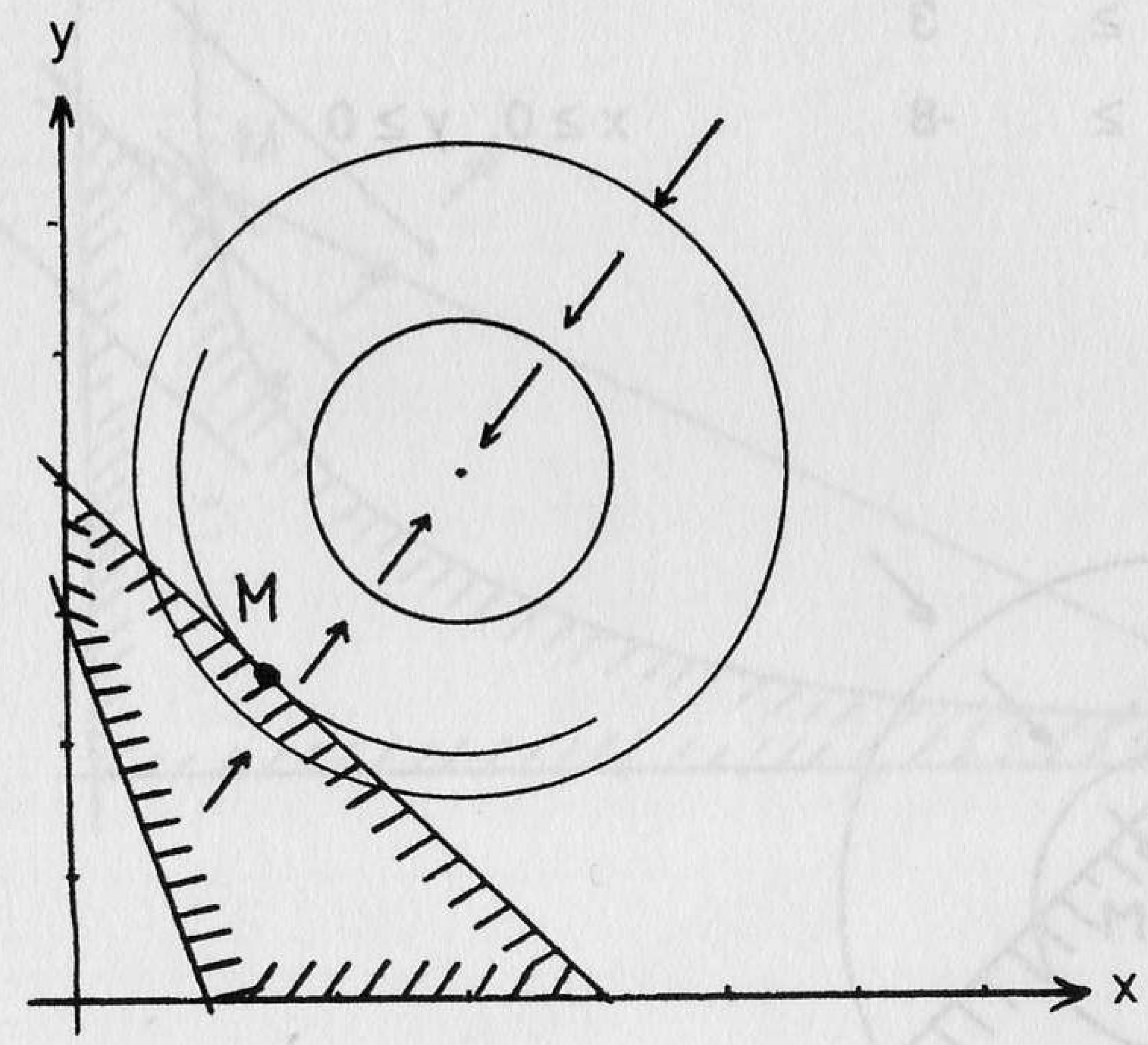
Beispiel 1:

Zielfunktion:

$$z = (x-3)^2 + (y-4)^2 \rightarrow \text{Minimum}$$

Nebenbedingungen:

$$3x + y \geq 3$$
$$-x - y \geq -4 \qquad x \geq 0, \; y \geq 0$$



Im optimalen Punkt berührt einer der Kreise

$$K(x,y) = (x-3)^2 + (y-4)^2 - r^2 = 0$$

die aus der zweiten Nebenbedingung folgende Gerade

$$y = 4 - x \qquad (1)$$

Nach den Regeln der Impliziten Differentiation muss gelten:

$$-\frac{K_x}{K_y} = -\frac{2(x-3)}{2(y-4)} = -1, \quad d.h.$$

$$x - 3 = y - 4$$

$$y = x + 1 \qquad (2)$$

Aus (1) und (2) finden wir die Koordinaten des optimalen Punktes:

$\underline{x = 1.5}$ $\underline{y = 2.5}$

Man beachte: Das Minimum wird <u>nicht</u> in einem Eckpunkt (Vertex) des Gebietes der zulässigen Lösungen angenommen. Nur eine der Nebenbedingungen ist im optimalen Punkt exakt als Gleichung erfüllt.

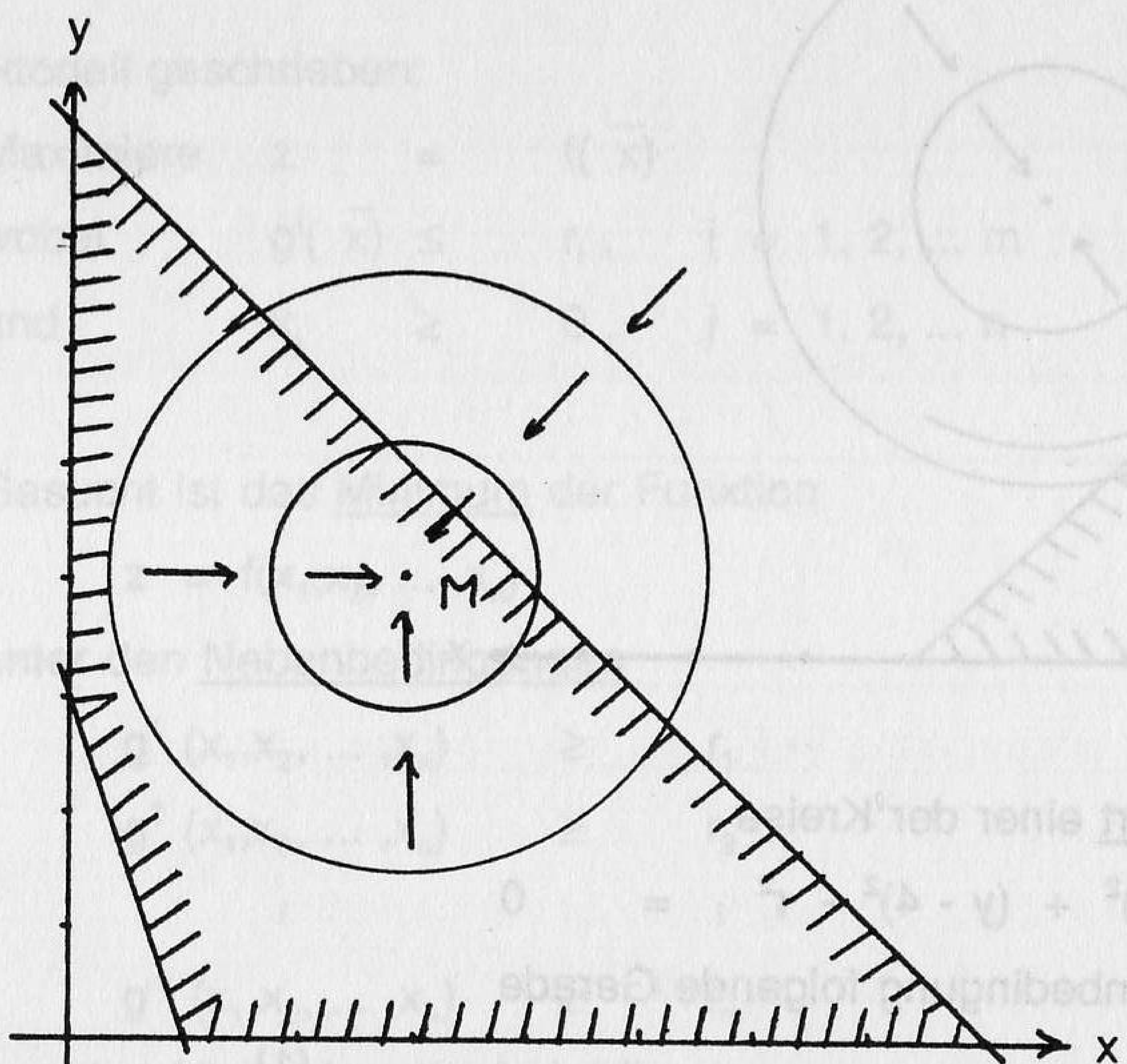
<u>Beispiel 2</u>:

Zielfunktion:

$$z = (x-3)^2 + (y-4)^2 \quad \rightarrow \text{Minimum}$$

Nebenbedingungen:

$$3x + y \geq 3$$
$$-x - y \geq -8 \qquad x \geq 0,\ y \geq 0$$



Das Minimum von $z = (x-3)^2 + (y-4)^2$ wird im Punkt (3/4) im <u>Innern</u> des Gebietes der zulässigen Lösungen angenommen.

Es gibt hier nicht eine einzige Richtung abnehmder Werte der Zielfunktion.

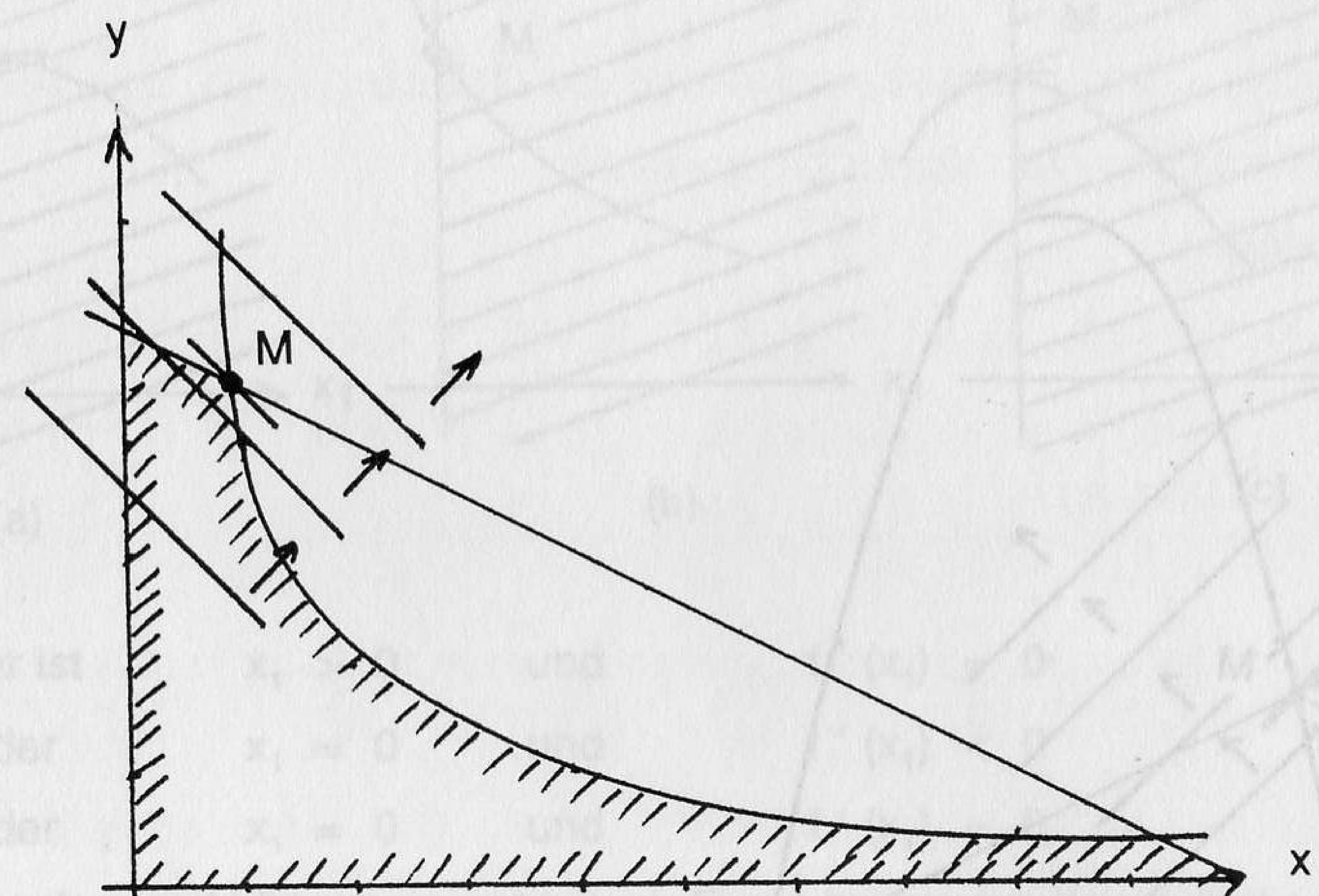
<u>Beispiel 3:</u>

Zielfunktion:

$$z = 2x + y \quad \rightarrow \text{Maximum}$$

Nebenbedingungen:

$$x\,y \leq 4$$
$$x + 2y \leq 10 \qquad x \geq 0,\ y \geq 0$$



Das Gebiet der zulässigen Lösungen ist <u>keine konvexe</u> Menge. Das <u>lokale</u> Maximum M ist <u>nicht</u> globales Maximum.

(Frage: In welchem Punkt wird das globale Maximum angenommen ?)

Beispiel 4:

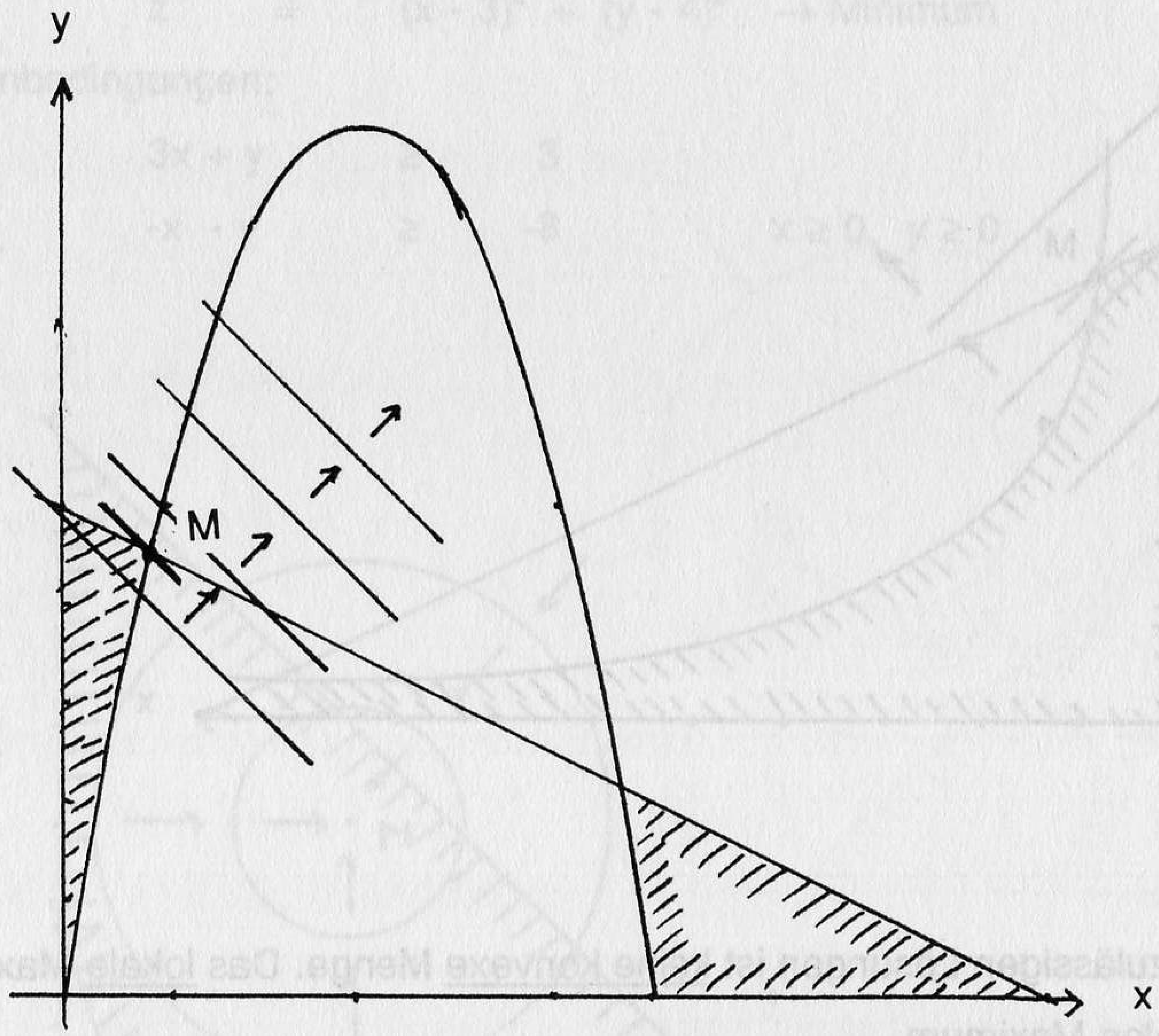
Zielfunktion:

$$z = 2x + y \quad \rightarrow \text{Maximum}$$

Nebenbedingungen:

$$-x^2 + 6x - y \leq 0$$

$$x + 2y \leq 10 \qquad x \geq 0,\ y \geq 0$$

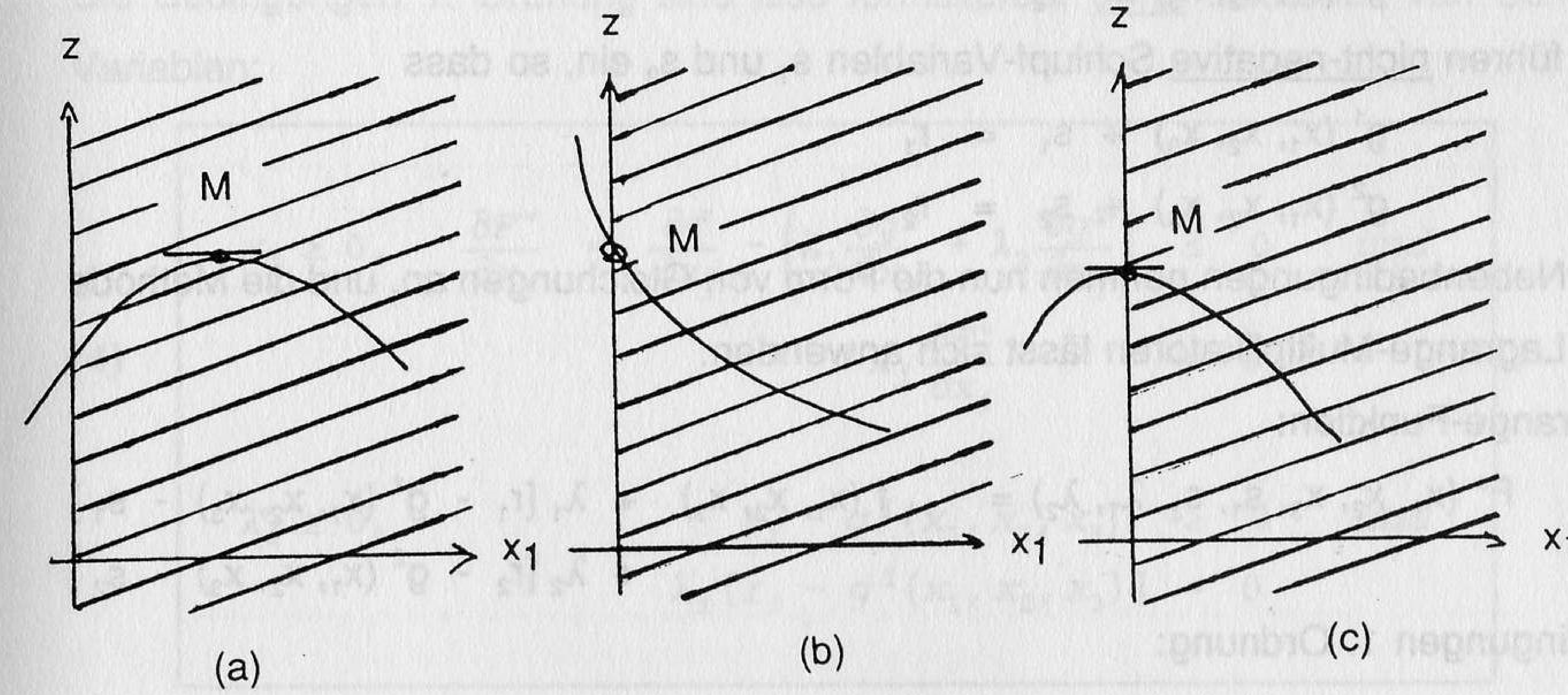


Das Gebiet der zulässigen Lösungen ist keine zusammenhängende Menge. Auch hier ist das lokale Maximum M nicht globales Maximum.

Zur Herleitung der Kuhn-Tucker Bedingungen betrachten wir zunächst die Auswirkungen der Nicht-Negativitätsbedingungen.

Im Falle einer Variablen:

(1) $$\boxed{\begin{aligned} z &= f(x_1) \quad \rightarrow \textit{Maximum} \\ x_1 &\geq 0 \end{aligned}}$$



(a) (b) (c)

Entweder ist	$x_1 > 0$	und	$f'(x_1) = 0$	(a)
oder	$x_1 = 0$	und	$f'(x_1) < 0$	(b)
oder	$x_1 = 0$	und	$f'(x_1) = 0$	(c)

Zusammenfassend können wir schreiben: Eine Lösung von (1) erfüllt die Bedingungen

$$\boxed{x_1 \geq 0, \qquad f'(x_1) \leq 0 \qquad \textit{und} \qquad x_1 \cdot f'(x_1) = 0}$$

Diese Bedingungen lassen sich auf den Fall von n Variablen übertragen:

(2) $$\boxed{\begin{aligned} z &= f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad \rightarrow \textit{Maximum} \\ x_j &\geq 0 \end{aligned}}$$

Eine Lösung von (2) erfüllt die Bedingungen

(3) $$\boxed{x_j \geq 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x_j} \leq 0 \quad \textit{und} \quad x_j \frac{\partial f}{\partial x_j} = 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, n}$$

Auswirkung der Nebenbedingungen:

Wir betrachten zunächst eine Funktion dreier Variablen mit zwei Nebenbedingungen

$$z = f(x_1, x_2, x_3) \quad \rightarrow \text{Maximum}$$
$$g^1(x_1, x_2, x_3) \le r_1$$
$$g^2(x_1, x_2, x_3) \le r_2$$

Wir führen nicht-negative Schlupf-Variablen s_1 und s_2 ein, so dass

$$g^1(x_1, x_2, x_3) + s_1 = r_1$$
$$g^2(x_1, x_2, x_3) + s_2 = r_2$$

Die Nebenbedingungen nehmen nun die Form von Gleichungen an, und die Methode der Lagrange-Multiplikatoren lässt sich anwenden.

Lagrange-Funktion:

$$F^*(x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, \lambda_1, \lambda_2) = f(x_1, x_2, x_3) + \lambda_1 [r_1 - g^1(x_1, x_2, x_3) - s_1] + \lambda_2 [r_2 - g^2(x_1, x_2, x_3) - s_2]$$

Bedingungen 1. Ordnung:

$$\frac{\partial F^*}{\partial x_1} = \frac{\partial F^*}{\partial x_2} = \frac{\partial F^*}{\partial x_3} = \frac{\partial F^*}{\partial s_1} = \frac{\partial F^*}{\partial s_2} = \frac{\partial F^*}{\partial \lambda_1} = \frac{\partial F^*}{\partial \lambda_2} = 0$$

Da $x_j \ge 0$, $s_i \ge 0$, müssen diese Bedingungen wie folgt modifiziert werden:

$$(i) \quad x_j \ge 0 \quad \frac{\partial F^*}{\partial x_j} \le 0 \quad \text{und} \quad x_j \frac{\partial F^*}{\partial x_j} = 0 \quad j = 1,2,3$$

$$(ii) \quad s_i \ge 0 \quad \frac{\partial F^*}{\partial s_i} \le 0 \quad \text{und} \quad s_i \frac{\partial F^*}{\partial s_i} = 0 \quad i = 1,2$$

$$(iii) \quad \frac{\partial F^*}{\partial \lambda_i} = 0 \quad i = 1,2$$

Beachtet man, dass $\frac{\partial F^*}{\partial s_i} = -\lambda_i$, so lässt sich Zeile (ii) schreiben als

$$s_i \ge 0 \quad -\lambda_i \le 0 \quad \text{und} \quad s_i \lambda_i = 0$$
$$\text{d.h.} \quad \lambda_i \ge 0$$

Zeile (iii) verlangt die Gültigkeit der Nebenbedingungen

$$s_i = r_i - g^i(x_1, x_2, x_3)$$

Somit lassen sich Zeilen (ii) und (iii) zusammenfassen zu den Bedingungen

$$(iv) \quad r_i - g^i(x_1, x_2, x_3) \ge 0, \quad \lambda_i \ge 0 \quad \text{und} \quad \lambda_i [r_i - g^i(x_1, x_2, x_3)] = 0$$

Die Bedingungen 1. Ordnung sind also formulierbar ohne Gebrauch von Schlupf-Variablen:

$$(4) \quad \boxed{\begin{array}{ll} x_j \ge 0, & \frac{\partial F^*}{\partial x_j} = \frac{\partial f}{\partial x_j} - \left(\lambda_1 \frac{\partial g^1}{\partial x_j} + \lambda_2 \frac{\partial g^2}{\partial x_j}\right) \le 0 \quad \text{und} \\ & x_j \frac{\partial F^*}{\partial x_j} = 0 \\ \lambda_i \ge 0, & r_i - g^i(x_1, x_2, x_3) \ge 0 \quad \text{und} \\ & \lambda_i [r_i - g^i(x_1, x_2, x_3)] = 0 \end{array}}$$

Dieses Resultat zeigt, dass man mit einer einfacheren Lagrange-Funktion arbeiten kann: Wir bilden

$$F = f(x_1, x_2, x_3) + \lambda_1 [r_1 - g^1(x_1, x_2, x_3)] + \lambda_2 [r_2 - g^2(x_1, x_2, x_3)]$$

(4) ist äquivalent mit den Kuhn-Tucker Bedingungen

$$(5) \quad \boxed{\begin{array}{lllll} x_j \ge 0, & \frac{\partial F}{\partial x_j} \le 0 & \text{und} & x_j \frac{\partial F}{\partial x_j} = 0, & j = 1,2,3 \\ \lambda_i \ge 0, & \frac{\partial F}{\partial \lambda_i} \ge 0 & \text{und} & \lambda_i \frac{\partial F}{\partial \lambda_i} = 0, & i = 1,2 \end{array}}$$

Bemerkung: Die Lagrange-Funktion F sowie die Bedingungen (5) lassen sich ohne weiteres auf den Fall von n Variablen und m Nebenbedingungen verallgemeinern, sowie auf den Fall einer Minimierung (s.o. Problem (B)).

Man bilde die Lagrange-Funktion

$$F = f(x_1, \ldots, x_n) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i [r_i - g^i(x_1, \ldots, x_n)]$$

(A) Maximierung:

$$(6)\qquad \boxed{\begin{array}{llll} x_j \geq 0, \quad \dfrac{\partial F}{\partial x_j} \leq 0 & \text{und} & x_j \dfrac{\partial F}{\partial x_j} = 0, & j = 1, \ldots, n \\[2ex] \lambda_i \geq 0, \quad \dfrac{\partial F}{\partial \lambda_i} \geq 0 & \text{und} & \lambda_i \dfrac{\partial F}{\partial \lambda_i} = 0, & i = 1, \ldots, m \end{array}}$$

(B) Minimierung:

$$(7)\qquad \boxed{\begin{array}{llll} x_j \geq 0, \quad \dfrac{\partial F}{\partial x_j} \geq 0 & \text{und} & x_j \dfrac{\partial F}{\partial x_j} = 0, & j = 1, \ldots, n \\[2ex] \lambda_i \geq 0, \quad \dfrac{\partial F}{\partial \lambda_i} \leq 0 & \text{und} & \lambda_i \dfrac{\partial F}{\partial \lambda_i} = 0, & i = 1, \ldots, m \end{array}}$$

Man beachte: Einige der obigen Bedingungen wiederholen Bedingungen der Problemstellung:

$$x_j \geq 0; \qquad \frac{\partial F}{\partial \lambda_i} \geq 0 \quad (Maximum) \quad bzw \quad \frac{\partial F}{\partial \lambda_i} \leq 0 \quad (Minimum)$$

Wegen der Symmetrie der Formulierung sind sie nochmals aufgelistet.

Beispiel: Man zeige, dass die Lösung in Beispiel 1, S. 133, die Kuhn-Tucker Bedingungen erfüllt.

Da das Problem ein Minimierungsproblem ist, sind die Bedingungen (7) zu erfüllen.

$$F(x, y, \lambda_1, \lambda_2) = (x-3)^2 + (y-4)^2 + \lambda_1 (3 - 3x - y) + \lambda_2 (-4 + x + y)$$

$$(i) \quad \frac{\partial F}{\partial x} = 2(x-3) - 3\lambda_1 + \lambda_2 \geq 0 \quad und \quad x(2(x-3) - 3\lambda_1 + \lambda_2) = 0$$

$$(ii) \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 2(y-4) - \lambda_1 + \lambda_2 \geq 0 \quad und \quad y(2(y-4) - \lambda_1 + \lambda_2) = 0$$

$$(iii) \quad \frac{\partial F}{\partial \lambda_1} = 3 - 3x - y \leq 0 \quad und \quad \lambda_1 (3 - 3x - y) = 0$$

$$(iv) \quad \frac{\partial F}{\partial \lambda_2} = -4 + x + y \leq 0 \quad und \quad \lambda_2 (-4 + x + y) = 0$$

Frage: Können nicht-negative Werte λ_1, λ_2 gefunden werden, die zusammen mit $x = 1.5$, $y = 2.5$ die obigen Bedingungen erfüllen ?

Da $x \neq 0$, $y \neq 0$, ergeben (i) und (ii) die Bedingungen

$$2x - 6 - 3\lambda_1 + \lambda_2 = -3 - 3\lambda_1 + \lambda_2 = 0$$

$$2y - 8 - \lambda_1 + \lambda_2 = -3 - \lambda_1 + \lambda_2 = 0$$

Lösung: $\lambda_1 = 0$

$\lambda_2 = 3$

$$(iii) \quad 3 - 3x - y = 3 - 4.5 - 2.5 = -4 \leq 0$$

$$(iv) \quad -4 + x + y = -4 + 1.5 + 2.5 = 0$$

Die Kuhn-Tucker Bedingungen (7) sind erfüllt!

Sind die Kuhn-Tucker Bedingungen **notwendige**, **hinreichende** oder gar **notwendige und hinreichende Bedingungen** für ein Maximum oder Minimum unter Nebenbedingungen in Form beliebiger Ungleichungen ?

Die Antwort kann nicht für alle Zielfunktionen und alle Arten von Nebenbedingungen gemeinsam gegeben werden.

Wir beginnen mit der stärksten Aussage, die der Zielfunktion und den Nebenbedingungen die grössten Einschränkungen auferlegt, aber eine Situation beschreibt, die in der ökonomischen Theorie häufig auftritt.

<u>Satz 1:</u>

Gegeben ist das folgende nichtlineare Optimierungsproblem:

(A) Man maximiere $z = f(\overline{x})$

unter den Bedingungen $g^i(\overline{x}) \leq r_i, \quad i = 1, \dots, m$

und $x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n$

Falls

(a) die Zielfunktion $f(\overline{x})$ differenzierbar und **konkav** im Bereich $\overline{x} \geq \overline{0}$,

(b) alle Funktionen $g^i(\overline{x})$ differenzierbar und **konvex** im Bereich $\overline{x} \geq \overline{0}$,

(c) der Punkt $\overline{x}^0$ die Kuhn-Tucker-Maximum-Bedingungen (6) erfüllt,

dann ist $\overline{x}^0$ ein <u>globales</u> Maximum des Problems.

(B) Man minimiere $z = f(\overline{x})$

unter den Bedingungen $g^i(\overline{x}) \geq r_i, \quad i = 1, \dots, m$

und $x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n$

Falls

(a) die Zielfunktion $f(\overline{x})$ differenzierbar und **konvex** im Bereich $\overline{x} \geq \overline{0}$,

(b) alle Funktionen $g^i(\overline{x})$ differenzierbar und **konkav** im Bereich $\overline{x} \geq \overline{0}$,

(c) der Punkt $\overline{x}^0$ die Kuhn-Tucker-Minimum-Bedingungen (7) erfüllt,

dann ist $\overline{x}^0$ ein <u>globales</u> Minimum des Problems.

(Für den Beweis dieses und des folgenden Satzes vergleiche man z.B. Chiang [2].)

In der obigen Situation sind die Kuhn-Tucker-Bedingungen <u>hinreichende</u> Bedingungen.

Unter welchen Einschränkungen sie notwendige Bedingungen sind, wird im folgenden untersucht.

<u>Satz 2:</u>

Ist das Gebiet der zulässigen Lösungen eine durch <u>lineare</u> Ungleichungen bestimmte <u>konvexe</u> Menge, so sind die Kuhn-Tucker-Bedingungen <u>notwendige</u> Bedingungen für das Maximum / Minimum.

<u>Beispiel:</u> Man minimiere $z = x^2 + y^2$

unter der Bedingung $5x + 3y \geq 15$

und $x \geq 0, \quad y \geq 0.$

Die Zielfunktion ist <u>konvex</u>, die Nebenbedingung linear. Nach Satz 1 und Satz 2 sind die Kuhn-Tucker-Bedingungen notwendig und hinreichend für das Minimum.

Wir bilden $F(x,y,\lambda) = x^2 + y^2 + \lambda(15 - 5x - 3y)$

Bedingungen:

$x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad \lambda \geq 0$

(1) $F_x = 2x - 5\lambda \geq 0$ und $x(2x - 5\lambda) = 0$

d.h. $x = 0$ oder $2x = 5\lambda$ (2)

(3) $F_y = 2y - 3\lambda \geq 0$ und $y(2y - 3\lambda) = 0$

d.h. $y = 0$ oder $2y = 3\lambda$ (4)

(5) $F_\lambda = 15 - 5x - 3y \leq 0$ und $\lambda(15 - 5x - 3y) = 0$

d.h. $\lambda = 0$ oder $15 = 5x + 3y$ (6)

Es ist <u>$\lambda > 0$</u>, denn die Annahme $\lambda = 0$ führt auf einen Widerspruch:

$\lambda = 0 \Rightarrow \quad x = 0$ (wegen (2))

$y = 0$ (wegen (4))

Eingesetzt in (5): $15 \leq 0$ Widerspruch !

Aus (1) folgt: $2x \geq 5\lambda > 0$, also <u>$x > 0$</u>

Aus (3) folgt: $2y \geq 3\lambda > 0$, also <u>$y > 0$</u>

Schliesslich kann aus (2) und (4) λ eliminiert werden:

$$\frac{2}{5}x = \frac{2}{3}y, \quad bzw. \quad y = \frac{3}{5}x$$

Setzt man diesen Wert in (6) ein, so erhält man

$$5x + 3 \cdot \frac{3}{5}x = 15 \quad \Rightarrow \quad \underline{x = \frac{75}{34}} \quad \underline{y = \frac{45}{34}}$$

Die Kuhn-Tucker-Bedingungen sind für viel allgemeinere Gebiete von zulässigen Lösungen, als dies Satz 2 festhält, <u>notwendige</u> Bedingungen für die Lösung des Optimierungsproblems.

Gewisse Irregularitäten in Randpunkten müssen aber ausgeschlossen werden.

Wir zeigen zunächst an einem Beispiel, dass es möglich ist, dass das Optimum in einem Punkt angenommen wird, welcher die Kuhn-Tucker-Bedingungen <u>nicht</u> erfüllt.

Anschliessend formulieren wir einschränkende Qualifikations-Bedingungen (Kuhn-Tucker constraint qualifications: KTCQ), unter welchen die Kuhn-Tucker-Bedingungen <u>notwendige</u> Bedingungen für die Lösung des Optimierungsproblems werden.

<u>Beispiel</u>

Man maximiere

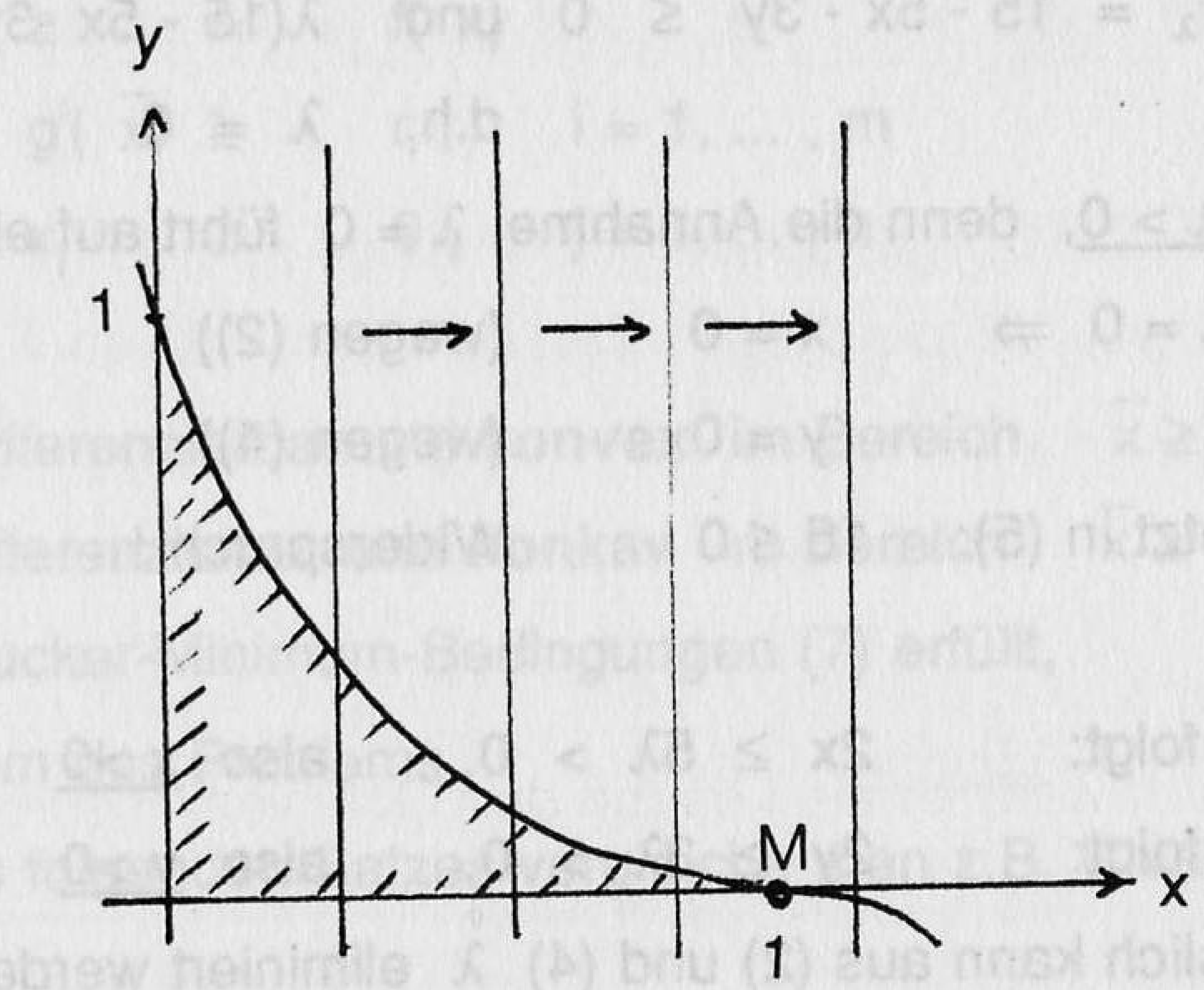
$z = f(x,y) = x$

unter der Nebenbedingung

$y - (1-x)^3 \leq 0$

wobei

$x \geq 0, \quad y \geq 0$



Die graphische Lösung zeigt, dass z im Punkt (1,0) maximal wird, $z_{max} = 1$.

Wir bilden die Lagrange-Funktion

$$z = F(x,y,\lambda) = x + \lambda\left((1-x)^3 - y\right)$$

Kuhn-Tucker-Bedingungen:

$$(1) \quad \frac{\partial F}{\partial x} = 1 - 3\lambda(1-x)^2 \leq 0\,, \qquad x \geq 0 \;\; und \;\; x\left(1-3\lambda(1-x)^2\right) = 0$$

$$(2) \quad \frac{\partial F}{\partial y} = -\lambda \leq 0\,, \qquad y \geq 0 \;\; und \;\; y(-\lambda) = 0$$

$$(3) \quad \frac{\partial F}{\partial \lambda} = (1-x)^3 - y \geq 0\,, \qquad \lambda \geq 0 \;\; und \;\; \lambda\left((1-x)^3 - y\right) = 0$$

Der Punkt (1,0) erfüllt die Bedingungen (2) und (3), verletzt aber die Bedingung (1):

$$\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{(1,0)} = 1 \not\leq 0$$

Zur Formulierung der Qualifikations-Bedingung KTCQ benötigen wir zwei Begriffe:

(a) "Testvektor"

(b) "qualifizierender Kurvenbogen",

die hier eingeführt werden sollen.

Es sei $\overline{x}_0 = (x_{1_0}, x_{2_0}, \ldots, x_{n_0})$ ein Randpunkt des Gebietes der zulässigen Lösungen, welcher als Lösung des Optimierungsproblems in Frage kommt.

(a) $dx = (dx_1, dx_2, \ldots, dx_n)$ sei ein <u>"Testvektor"</u>, nämlich ein Vektor, der von $\overline{x}_0$ ausgeht, wobei verlangt wird:

(1) $dx_j \geq 0$ falls $x_{j_0} = 0$

d.h. falls die j-te Komponente von $\overline{x}_0$ gleich 0 ist, soll in x_j - Richtung eine <u>nicht-negative</u> Veränderung betrachtet werden.

(2) Für jede Nebenbedingung g^i, welche von $\overline{x}_0$ <u>exakt</u> erfüllt ist, muss gelten:

$$dg^i(\overline{x}_0) = g_1^i\, dx_1 + \ldots + g_n^i\, dx_n \quad \begin{array}{l} \leq 0 \ (\textit{Maximierung}) \\ \geq 0 \ (\textit{Minimierung}) \end{array}$$

d.h. es sollen nur solche Veränderungen zugelassen sein, für welche g^i nicht zunimmt (beim Maximierungsproblem) bzw. nicht abnimmt (beim Minimierungsproblem).

(b) Ein "qualifizierender Kurvenbogen" ist eine differenzierbare Kurve, welche

(1) vom Punkt $\overline{x}_0$ ausgeht,

(2) ganz im Gebiet der zulässigen Lösungen verläuft,

(3) tangential zu einem gegebenen Testvektor verläuft.

Definition:

Wenn für jeden Punkt $\overline{x}_0$ des Randes des Gebietes der zulässigen Lösungen zu jedem Testvektor $\overline{dx}$ ein qualifizierender Bogen existiert, sagt man, die Kuhn-Tucker qualifizierenden Bedingungen (KTCQ) seien erfüllt.

Satz 3:

Die Kuhn-Tucker Bedingungen sind notwendige Bedingungen für die Lösung des nicht-linearen Optimierungsproblems, falls das Gebiet der zulässigen Lösungen die Kuhn-Tucker qualifizierenden Bedingungen KTCQ erfüllt.

Im Beispiel S. 144 sind die qualifizierenden Bedingungen nicht erfüllt:

Ein Testvektor (dx, dy) in (1,0) muss erfüllen:

(1) Da $y = 0$, muss gelten: $dy \geq 0$.

(2) Da die Nebenbedingung $(x-1)^3 + y = 0$ exakt erfüllt ist, muss gelten:

$$dg = 3(x-1)^2 dx + 1 \cdot dy \Big|_{(1,0)} = dy \leq 0$$

Aus (1) und (2) folgt: $dy = 0$

Für jeden nach links gerichteten Testvektor $(dx,0) = (-c,0)$, $c > 0$, existiert ein qualifizierender Kurvenbogen, nämlich die Kurve $y = (1-x)^3$ selbst.

Dagegen ist keine im Gebiet der zulässigen Lösungen verlaufende Kurve tangential an einen nach rechts gerichteten Testvektor $(dx,0) = (c,0)$, $c > 0$.

ANHANG: KOMPLEXE ZAHLEN

Definitionen. Rechenregeln

Im Bereich der reellen Zahlen ist das Radizieren nicht uneingeschränkt ausführbar (z.B. gibt es keine reelle Zahl $x = \sqrt{-7}$). Es ist daher eine Erweiterung des Zahlenbereiches erforderlich. Diese Erweiterung - gegen Ende des 18. Jahrhunderts entstanden - führte zum Bereich der komplexen Zahlen.

Von den unzähligen Anwendungsgebieten seien erwähnt:

- Schwingungsvorgänge
- Saisonbereinigung von ökonomischen Zeitreihen
- Systemtheorie

Def. 1: Die Menge der komplexen Zahlen ist definiert als

$\mathbb{C} = \{z = a + ib \;/\; a \text{ reell}, b \text{ reell}, i^2 = -1\}$

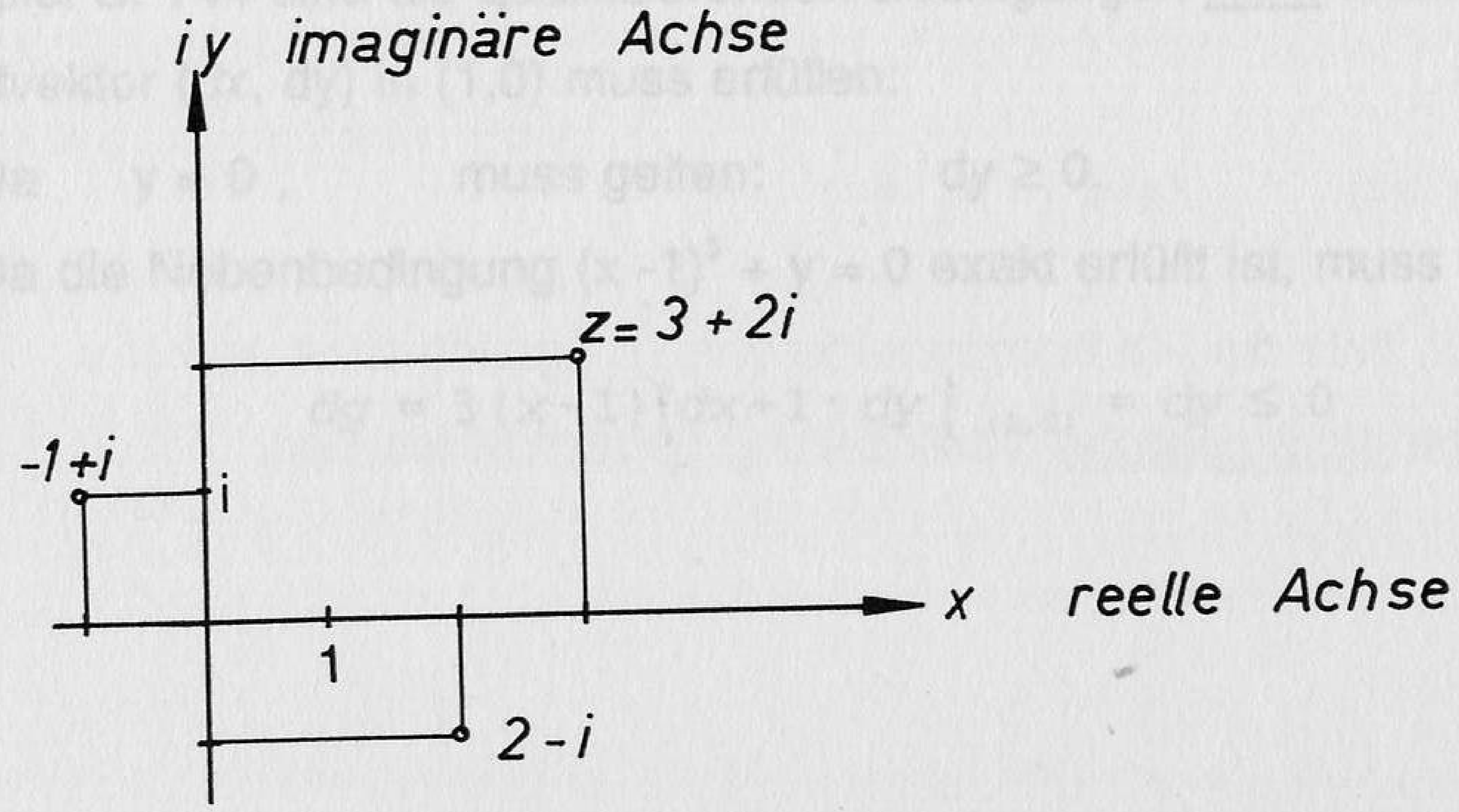
a heisst Realteil, b Imaginärteil von z.

Bemerkungen:

1) Ist b = 0, so ist $a + i \cdot 0 = a$ eine reelle Zahl, d.h. $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

2) Ist a = 0, so heisst $0 + ib = ib$ imaginär

Graphische Darstellung: Gauss'sche Zahlenebene



Jeder komplexen Zahl entspricht eineindeutig ein Punkt der Ebene.

Def. 2: Zwei komplexe Zahlen $z_1 = a + bi$ und $z_2 = c + di$ heissen gleich genau dann, wenn sie gleichen Realteil und gleichen Imaginärteil haben.

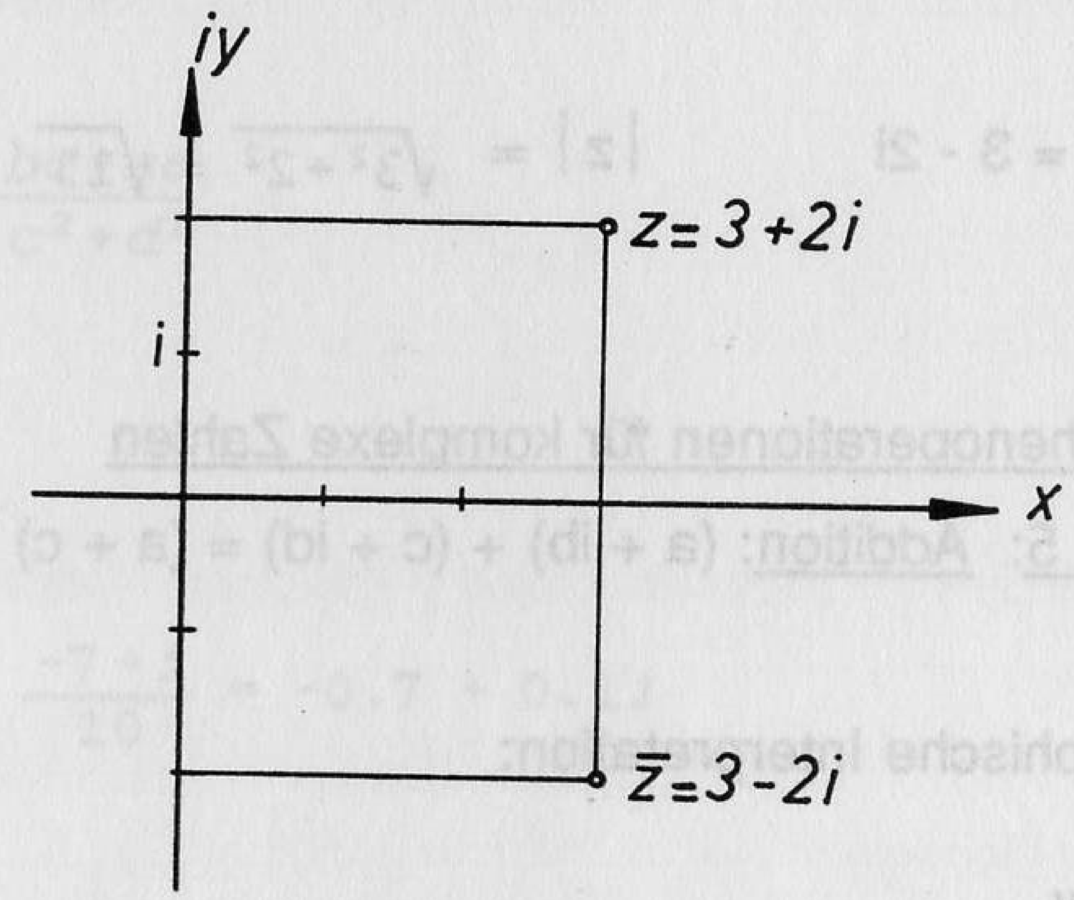
$$a + bi = c + di \quad \overset{\text{Def.}}{\Leftrightarrow} \quad a = c \text{ und } b = d$$

Def. 3: $\bar{z} = a - ib$ heisst zu $z = a + ib$ konjugiert komplex

Beispiel 1)

$z = 3 + 2i$ und

$\bar{z} = 3 - 2i$ sind konjugiert komplex



$\bar{z}$ ist das Spiegelbild von z bezüglich der x-Achse

Beispiel 2)

Gesucht sind die Lösungen der quadratischen Gleichung $z^2 + 4z + 13 = 0$

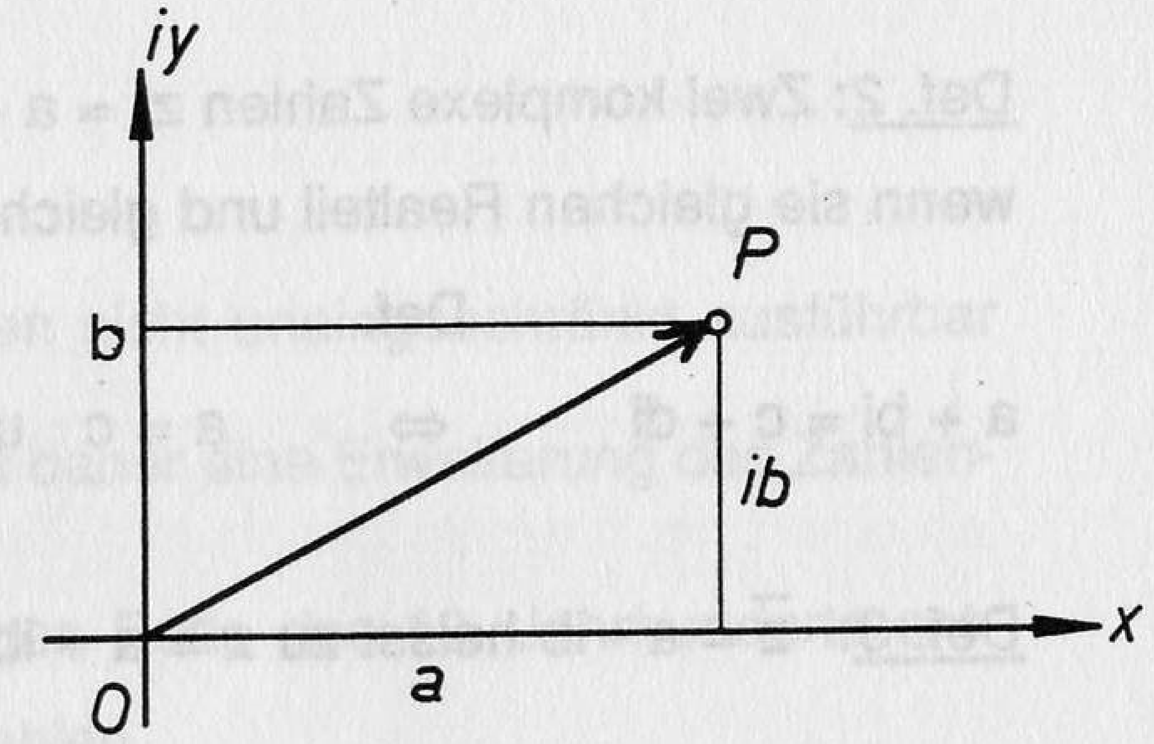
$$z_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 13}}{2} = -2 \pm 3i$$

Beachte: z_2 ist zu z_1 konjugiert komplex: $z_2 = \overline{z_1}$

Allgemein gilt: Die Lösungen einer quadratischen Gleichung mit reellen Koeffizienten sind entweder beide reell, oder zueinander konjugiert komplex.

Def. 4: Der absolute Betrag $|z|$ ist definiert als $|z| = +\sqrt{a^2+b^2}$

Bemerkung:
Nach dem Satz von Pythagoras ist dies die Länge der Strecke $\overline{OP}$ (resp. Betrag des Vektors $\overrightarrow{OP}$).



Beispiele:

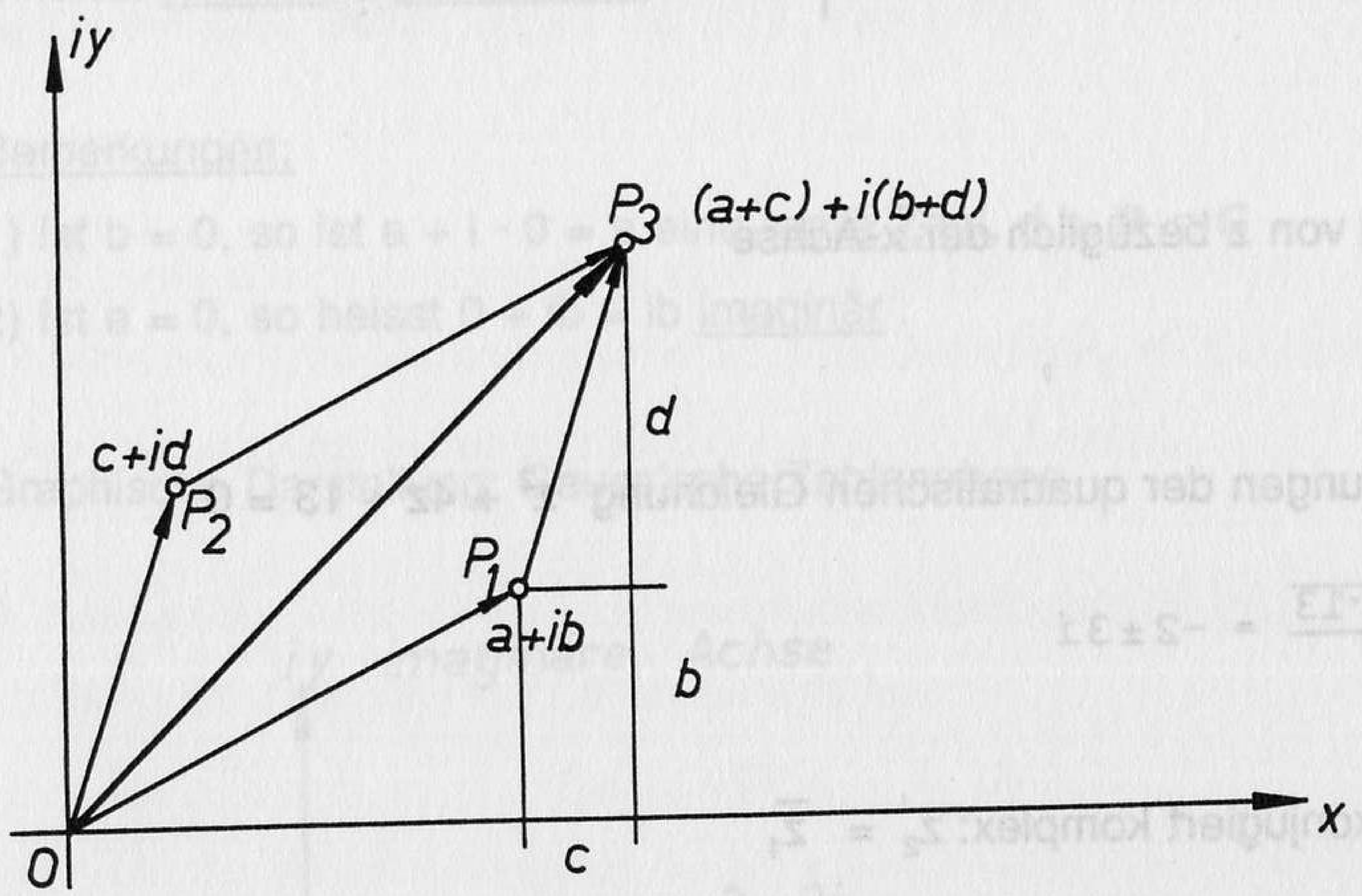
1) $z = -3 + 4i \qquad |z| = \sqrt{3^2+4^2} = 5$

2) $z = 3 - 2i \qquad |z| = \sqrt{3^2+2^2} = \sqrt{13}$

Rechenoperationen für komplexe Zahlen

Def. 5: Addition: $(a + ib) + (c + id) = (a + c) + i\,(b + d)$

Graphische Interpretation:



Bemerkung:
Die Addition komplexer Zahlen entspricht der Vektoraddition.

Def. 6: Subtraktion: $(a + ib) - (c + id) = (a - c) + i(b - d)$

Def. 7: Multiplikation: $(a + ib)\,(c + id) = (ac - bd) + i\,(ad + bc)$

Begründung: $(a + ib)\,(c + id) = ac + iad + ibc + i^2bd$

$$= ac + i\,(ad + bc) - bd$$

Man beachte: $(a + ib)\,(a - ib) = z \cdot \overline{z} = a^2 + b^2 = |z|^2$

Das Produkt zweier konjugiert komplexer Zahlen ist gleich dem Betrag im Quadrat (und somit eine reelle Zahl).

Def. 8: Division: $\dfrac{a+ib}{c+id} = \dfrac{ac+bd}{c^2+d^2} + i\,\dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}$

Begründung: Erweitern mit c - id.

Beispiel: $\dfrac{2-i}{-3+i} = \dfrac{(2-i)\,(-3-i)}{(-3+i)\,(-3-i)} = \dfrac{-7+i}{10} = -0.7 + 0.1i$

Zweiter Weg zur Lösung einer Division:

Beispiel: $\dfrac{2+3i}{1-i} = x + iy$ (Ansatz)

Dann ist $2 + 3i = (1 - i)\,(x + iy) = x + y + i\,(-x + y)$

Vergleich der Realteile und der Imaginärteile:

$$\left.\begin{aligned} 2 &= x + y \\ 3 &= -x + y \end{aligned}\right\} \qquad \textit{Lösung}: x = -\frac{1}{2} \qquad y = \frac{5}{2}$$

$$\frac{2+3i}{1-i} = -\frac{1}{2} + i\,\frac{5}{2}$$

Auch kompliziertere Rechenoperationen können mittels eines <u>Ansatzes</u> durchgeführt werden.

<u>Beispiel:</u> $\sqrt{i} = ?$

Ansatz: $\sqrt{i} = z = x + iy$

Dann ist: $i = z^2 = x^2 + 2ixy + i^2y^2 = (x^2 - y^2) + i \cdot 2xy$

Gleichsetzen der Realteile und der Imaginärteile ergibt:

$$\left.\begin{array}{lll} x^2 - y^2 = 0 & & x = \pm y \\ 2xy = 1 & & x = \frac{1}{2y}\ (*) \end{array}\right\} y^2 = \frac{1}{2}$$

$$y = \frac{\pm\sqrt{2}}{2}$$

Wegen (*) müssen x und y gleiches Vorzeichen haben.

2 Lösungen: $z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$; $z_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$

<u>Regeln zum Rechnen mit konjugiert komplexen Zahlen und Beträgen</u>

(1) (a) $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$

(b) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$

Nachweis:
$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{(a+ib)(c+id)} = (ac-bd) - i(ad+bc)$$
$$\overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = (a-ib)(c-id) = (ac-bd) - i(ad+bc)$$

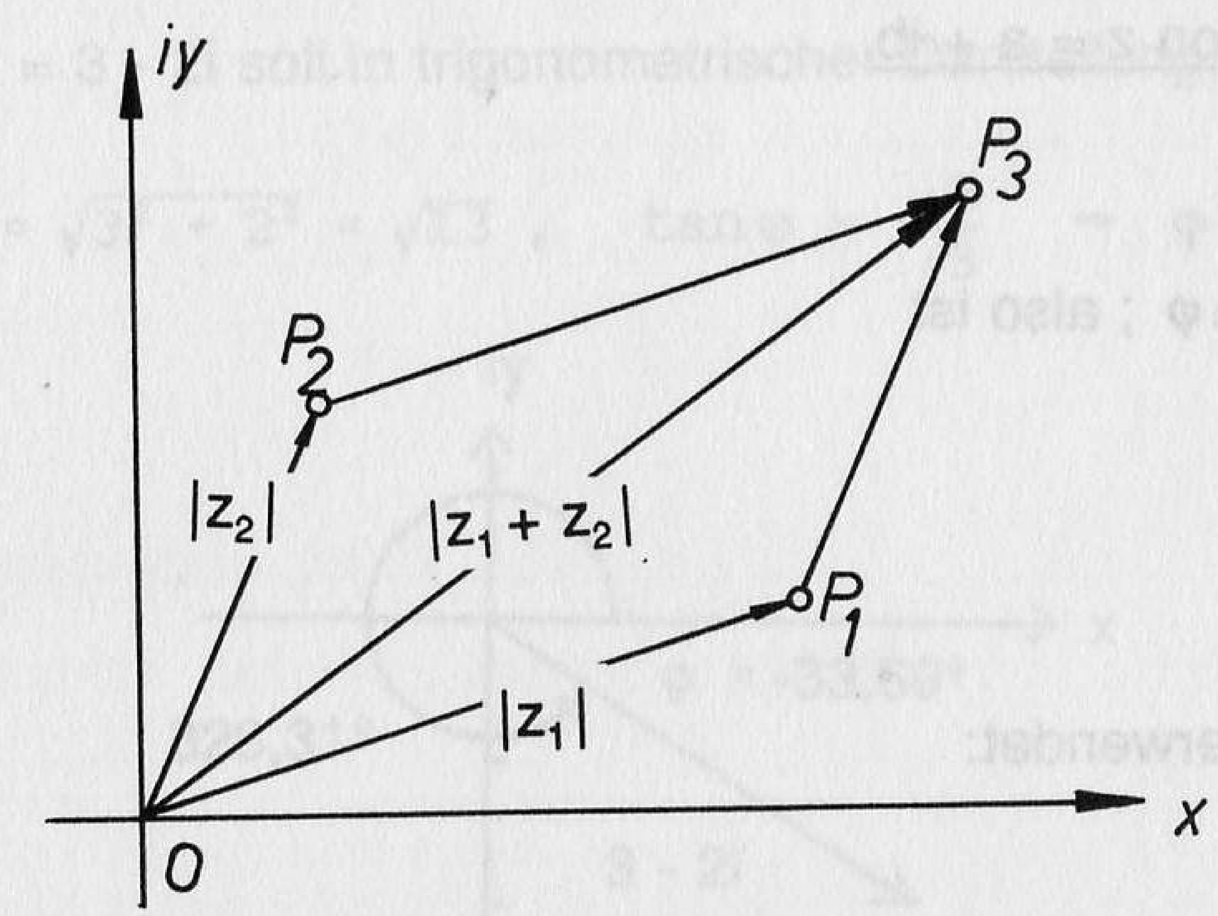
(c) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$

(2) (a) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

(b) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$

(c) $|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$ "Dreiecksungleichung" (Nachweis?)

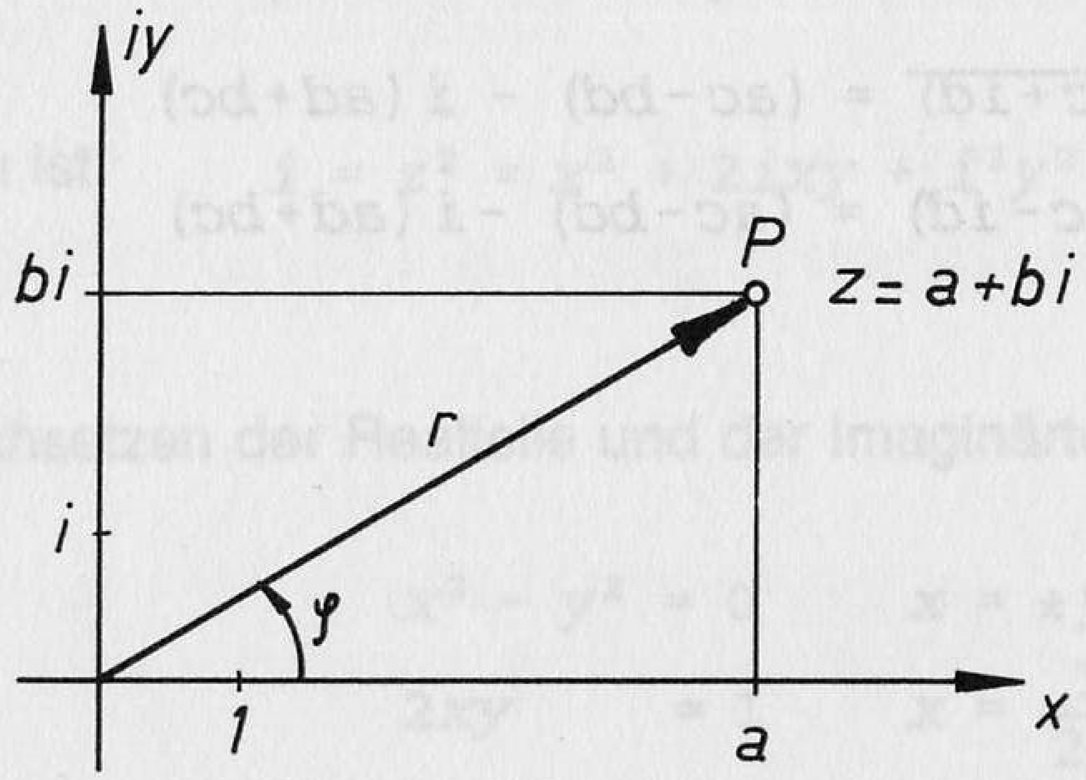
Geometrische Illustration der "Dreiecksungleichung":



Es bezeichne $|\overrightarrow{AB}|$ den Betrag eines Vektors $\overrightarrow{AB}$. Dann ist
$|\overrightarrow{OP_3}| \le |\overrightarrow{OP_1}| + |\overrightarrow{P_1P_3}| = |\overrightarrow{OP_1}| + |\overrightarrow{OP_2}|$

Trigonometrische Darstellung der komplexen Zahlen

A) Polarkoordinaten eines Punktes der Ebene



P ↔ (r, φ)

P ↔ (r, φ + 2kπ), k ∈ Z

Um diese Mehrdeutigkeit aus dem Wege zu schaffen, hält man sich an folgende Konvention: φ ist so zu wählen, dass $0 \le \varphi \le 2\pi$.

B) Trigonometrische Darstellung von z = a + ib

Es gilt: $\frac{a}{r} = \cos\varphi \qquad \frac{b}{r} = \sin\varphi$; also ist

$z = a + ib = r(\cos\varphi + i\cdot\sin\varphi)$

Häufig wird folgende Abkürzung verwendet:

$\cos\varphi + i\cdot\sin\varphi = \text{cis}\,\varphi$

Man beachte: (1) $r = \sqrt{a^2+b^2} = |z|$ Betrag von z

(2) $\tan\varphi = \frac{b}{a}$, *oder* $\varphi = \arctan\frac{b}{a}$

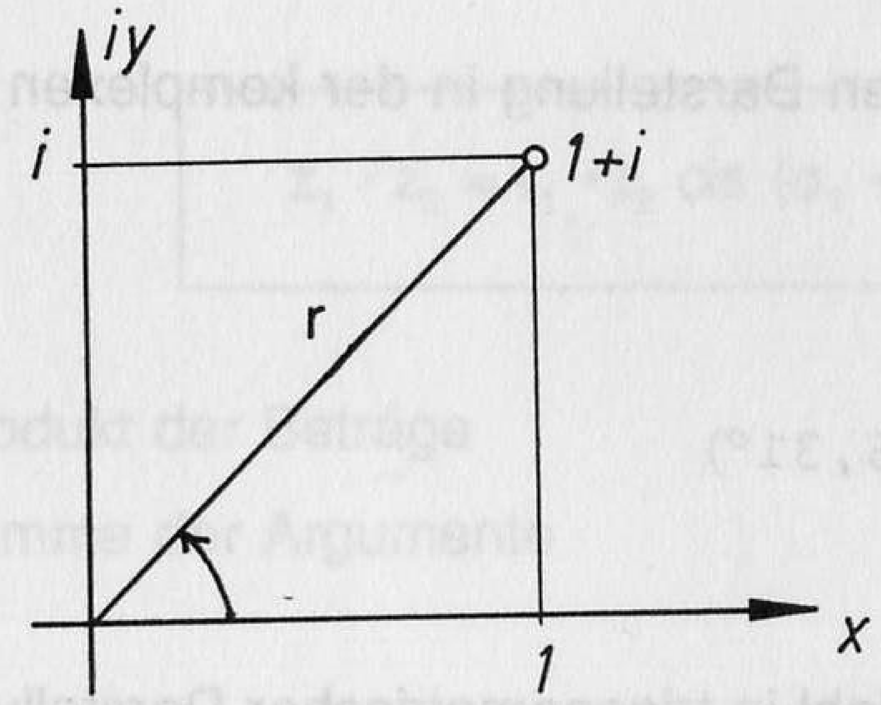
φ *heisst Argument von z.*

Beispiele

1) Gesucht ist die trigonometrische Darstellung der Zahl z = 1 + i

$r = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

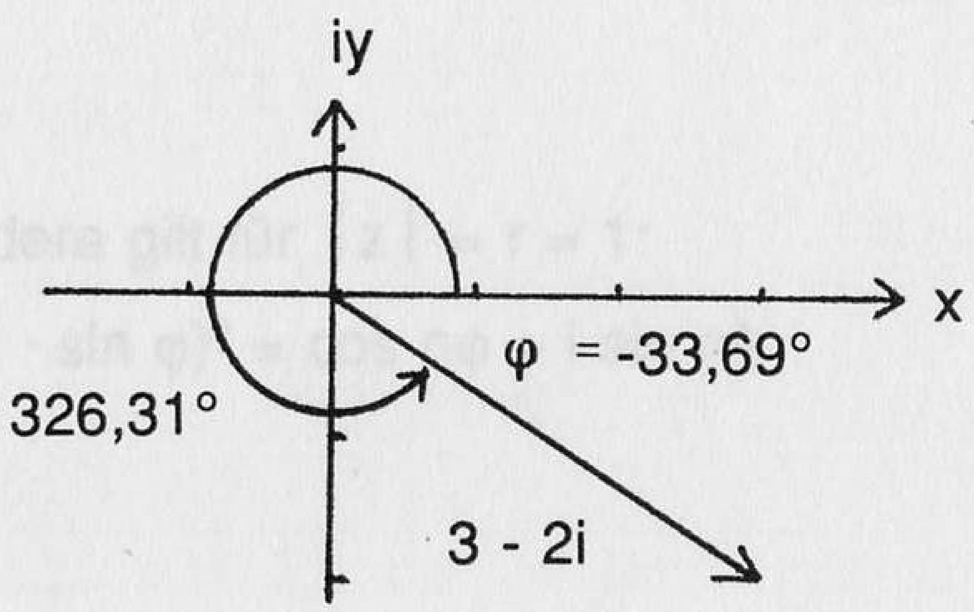
$\varphi = \frac{\pi}{4}$



$$z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\cdot\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\,cis\,\frac{\pi}{4}$$

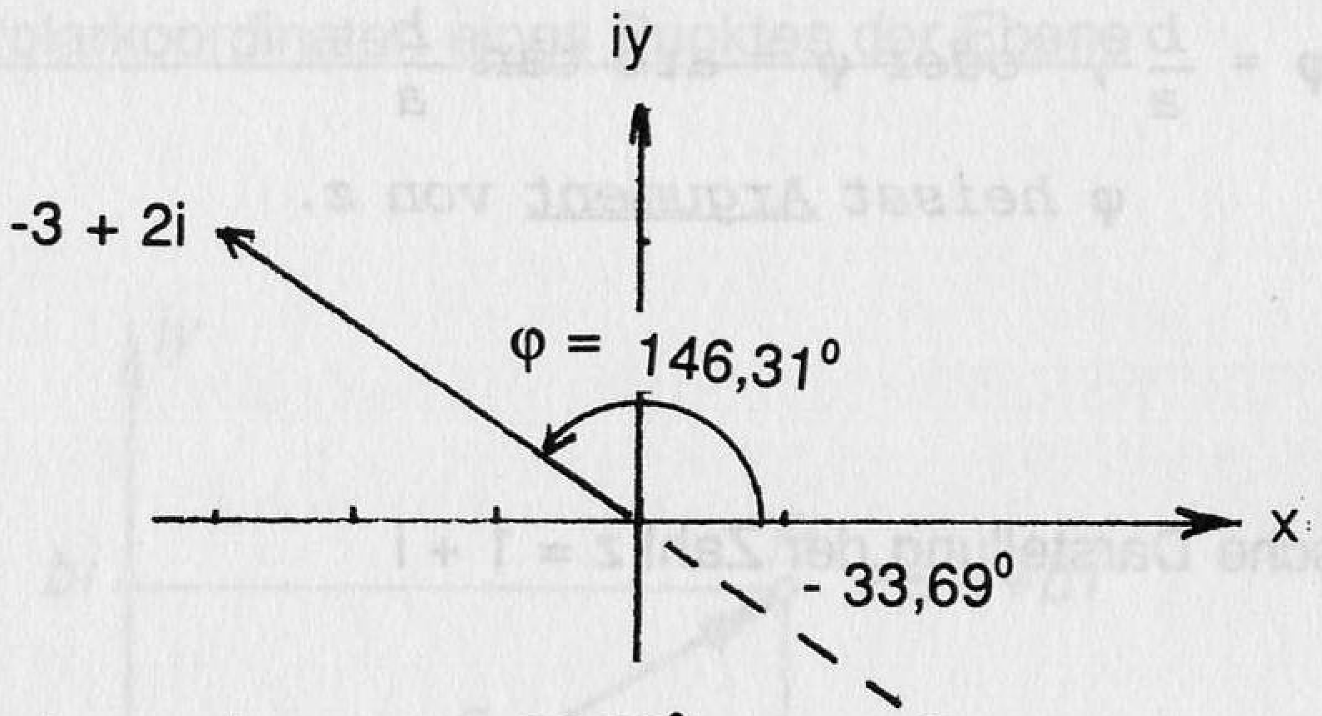
2) z = 3 - 2i soll in trigonometrischer Darstellung geschrieben werden

$r = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}\,,\quad \tan\varphi = -\frac{2}{3} \;\rightarrow\; \varphi = -33{,}69^\circ$ *bzw.* $326{,}31^\circ$



$$z = \sqrt{13}\,(\cos 326{,}31^\circ + i\cdot\sin 326{,}31^\circ)$$

3) $z = -3 + 2i$ $\qquad r = \sqrt{13} \qquad \tan\varphi = -\frac{2}{3}$



(Taschenrechner: $\varphi = -33{,}69^0$)

<u>Beachte:</u> Mit Hilfe der graphischen Darstellung in der komplexen Ebene berechnen wir φ als

$\varphi = -33{,}69^0 + 180^0 = 146{,}31^0$

$$z = -3 + 2i = \sqrt{13}\ cis\ (146{,}31^o)$$

4) <u>Gegeben</u> sei eine komplexe Zahl in trigonometrischer Darstellung.

$z = r\,(\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$

Gesucht ist ihre <u>kartesische Darstellung</u>, d.h. die Darstellung in der Form $z = a + bi$.

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \underbrace{r\cos\varphi}_{a} + \underbrace{r\sin\varphi}_{b}\cdot i$$

$\Rightarrow \quad a = r\cos\varphi$

$\qquad b = r\sin\varphi$

<u>Beispiel:</u> $z = 3\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

$$\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}, \qquad \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}; \qquad z = \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i$$

<u>Bemerkung:</u> In trigonometrischer Darstellung ist das <u>Produkt</u> zweier komplexer Zahlen besonders leicht zu finden;

Es sei $z_1 = r_1\,(\cos\varphi_1 + i \cdot \sin\varphi_1)$

$\qquad z_2 = r_2\,(\cos\varphi_2 + i \cdot \sin\varphi_2)$

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1\ r_2\,(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + i\cdot\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + i\cdot\cos\varphi_2 + \sin\varphi_1 \\ &\quad + i^2\sin\varphi_1\sin\varphi_2) \\ &= r_1\ r_2\,[(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i\,(\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \cos\varphi_2\sin\varphi_1)] \\ &= r_1\ r_2\,[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\cdot\sin(\varphi_1 + \varphi_2)] \end{aligned}$$

$$\boxed{z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2\ cis\ (\varphi_1 + \varphi_2)}$$

Betrag = Produkt der Beträge

Argument = Summe der Argumente

Verallgemeinerungen:

1) $z_1 \cdot z_2 \cdot \ldots \cdot z_n = r_1 \cdot r_2 \cdot \ldots \cdot r_n\ cis\ (\varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_n)$

2) $z^n = r^n\ cis\ (n\varphi)$

Insbesondere gilt für $|z| = r = 1$:

$(\cos\varphi + i\cdot\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi$ Formel von <u>de Moivre</u>

Beispiele:

1) $z_1 = 1 + i$ $\qquad$ $z_2 = 1 - \sqrt{3}\,i$

$$z_1 = \sqrt{2}\,cis\frac{\pi}{4} \qquad z_2 = 2\,cis\frac{5\pi}{3}$$

$$z_1 \cdot z_2 = 2\sqrt{2}\,cis\left(\frac{\pi}{4} + \frac{5\pi}{3}\right) = 2\sqrt{2}\;cis\left(\frac{23\pi}{12}\right)$$

$$= 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} - i\sin\frac{\pi}{12}\right) = 2.732 - 0.732i$$

2) $z = 1 + i$ $\qquad$ Man berechne z^{17}

$$z = \sqrt{2}\,cis\frac{\pi}{4} \qquad z^{17} = (\sqrt{2})^{17}\,cis\left(\frac{17\pi}{4}\right)$$

$$= 2^8\sqrt{2}\,cis\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= 256\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 256\,(1 + i)$$

3) $\sqrt{i} = z = ?$

$$z^2 = i = cis\left(\frac{\pi}{2}\right) \qquad\qquad = cis\left(\frac{5\pi}{2}\right)$$

1. Lösung:

$$z_1 = cis\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

2. Lösung:

$$z_2 = cis\,\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

4) $\sqrt[3]{2 + 2i} = ?$ $\quad$ 3 Lösungen!

$$2 + 2i = \sqrt{8}\,cis\frac{\pi}{4} \qquad z_1 = \sqrt{2}\,cis\frac{\pi}{12}$$

$$= \sqrt{8}\,cis\frac{9\pi}{4} \qquad z_2 = \sqrt{2}\,cis\frac{3\pi}{12} = -1 + i$$

$$= \sqrt{8}\,cis\frac{17\pi}{4} \qquad z_3 = \sqrt{2}\,cis\frac{17\pi}{12}$$

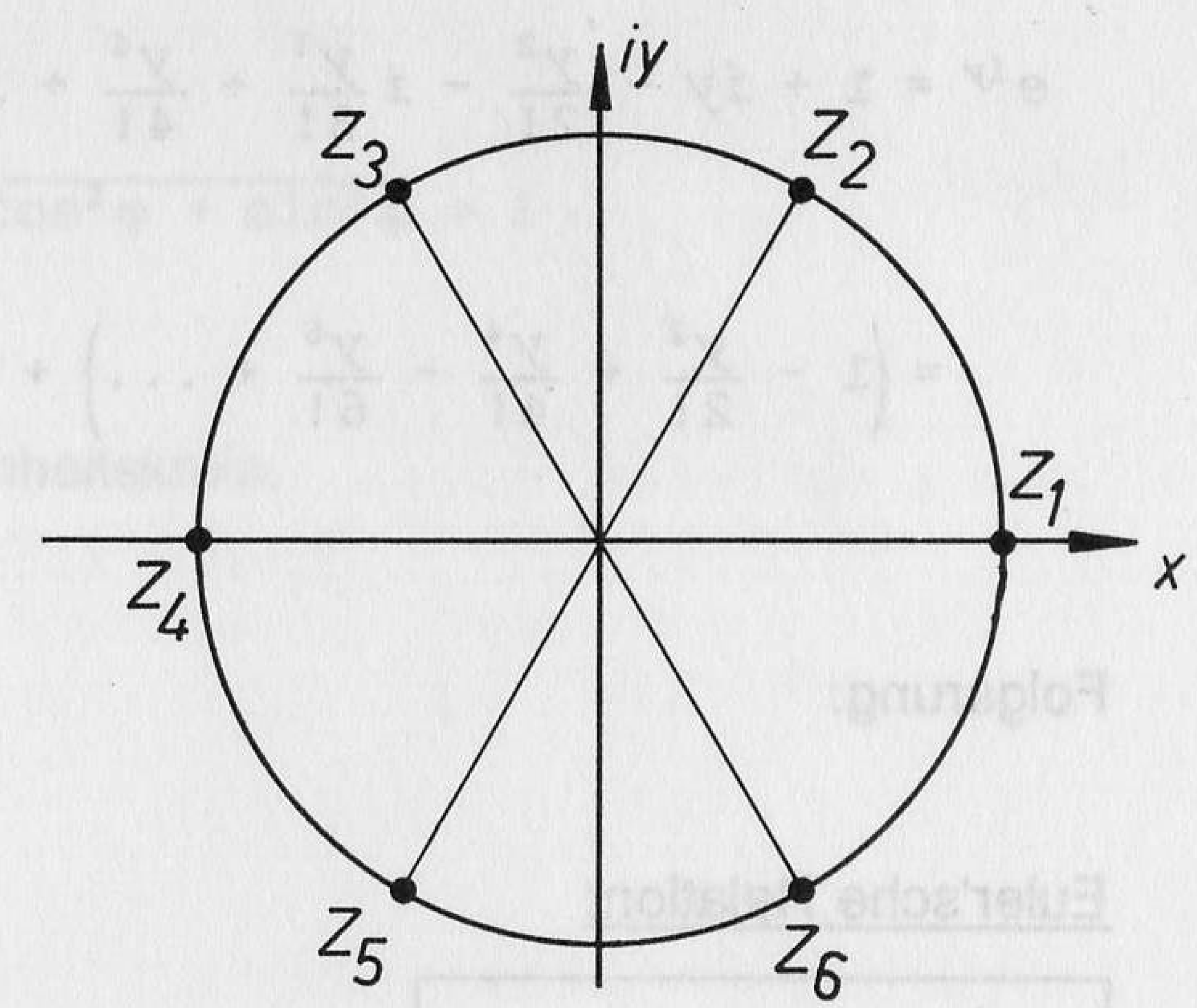
Bemerkung: Im Komplexen hat jede n-te Wurzel n verschiedene Lösungen

z.B. $\sqrt[6]{1} = z$

$z_1 = 1$ $\qquad$ $z_4 = -1$

$z_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ $\qquad$ $z_5 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

$z_3 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ $\qquad$ $z_6 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$



Allgemein gilt:

$$\sqrt[n]{r\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right)\right];$$

$$k = 0, 1, 2, \ldots\ (n-1)$$

Exponentielle Darstellung der komplexen Zahlen

sin y, cos y und e^x haben die folgenden Potenzreihen-Darstellungen:

$$\sin y = y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \frac{y^7}{7!} + \ldots$$

$$\cos y = 1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \frac{y^6}{6!} + \ldots$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots$$

Wir setzen im letzten Ausdruck x = iy, und erhalten
(da $i^2 = -1$, $i^3 = -i$; $i^4 = 1$, $i^5 = i$ usw.)

$$e^{iy} = 1 + iy - \frac{y^2}{2!} - i\frac{y^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} + i\frac{y^5}{5!} - \frac{y^6}{6!} - \ldots$$

$$= \left(1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \frac{y^6}{6!} + \ldots\right) + i\left(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} \ldots\right)$$

Folgerung:

Euler'sche Relation:

$e^{iy} = \cos y + i \sin y$
$e^{-iy} = \cos y - i \sin y$

Beispiel: Man zeige, dass $e^{i\pi} = -1$.

Die Euler´sche Relation besagt:

$$e^{i\pi} = \cos \pi + i\sin \pi = -1 + i\cdot 0 = \underline{-1}$$

Bemerkungen:

1) Da jede komplexe Zahl z in der Form z = r (cos φ + i sin φ) geschrieben werden kann, hat also auch jede komplexe Zahl eine exponentielle Darstellung $z = re^{i\varphi}$

Beispiel: a) $z = 5 + 5i = 5\sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$

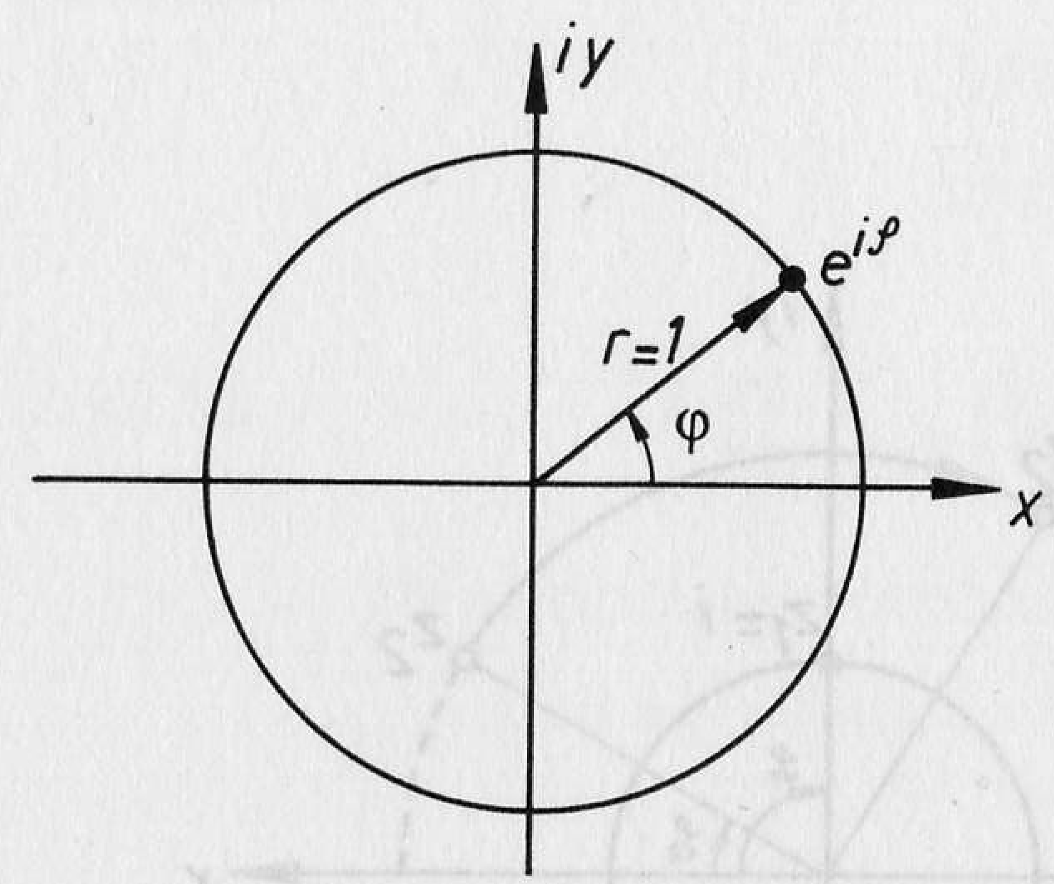
b) $z = 2 - i = \sqrt{5}\, e^{-0.464i}$

(denn aus $\tan \varphi = -\frac{1}{2}$ folgt

$\varphi = \arctan\left(-\frac{1}{2}\right) = -0.464$ mittels Taschenrechner)

2) $|e^{i\varphi}| = |\cos \varphi + i\sin \varphi| = \sqrt{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi} = 1$

Jede Zahl der Form $e^{i\varphi}$ liegt auf dem Einheitskreis.



3) Das Produkt zweier komplexer Zahlen findet man am einfachsten in der Exponentialdarstellung:

$$\left.\begin{aligned} z_1 &= r_1 e^{i\varphi_1} \\ z_2 &= r_2 e^{i\varphi_1} \end{aligned}\right\} \quad z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$$

(Bemerkung: Diesen rechnerischen Vorteil benutzt man in der Theorie zyklischer Vorgänge so, dass man eine Funktion $y = A\cos(\omega t + \varphi)$ darstellt als Realteil der entsprechenden komplexen Funktion $y_1 = A\, e^{i(\omega t + \varphi)}$, gewisse Überlegungen im Komplexen durchführt und vom Resultat wieder nur den Realteil betrachtet.)

<u>Beispiele:</u>

a)

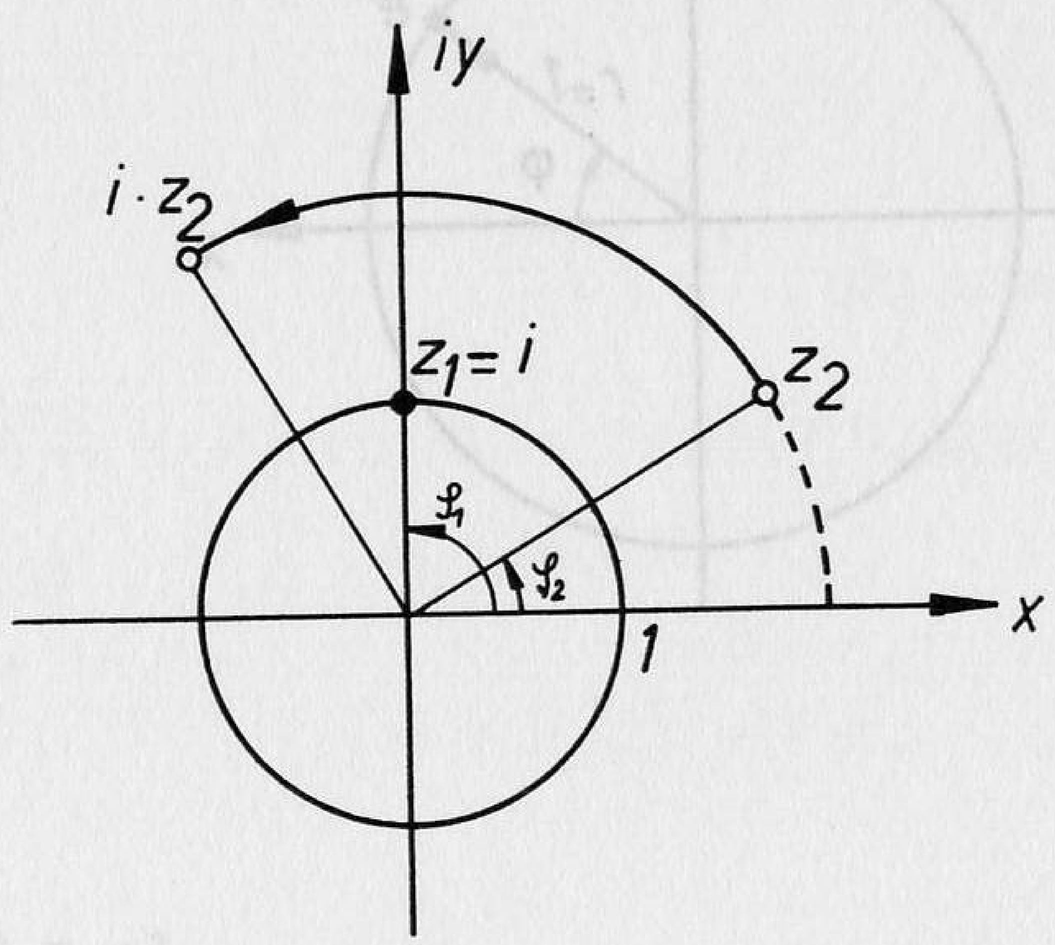
$$\left.\begin{aligned} z_1 &= 1 + i = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}} \\ z_2 &= 1 - \sqrt{3}\, i = 2 e^{i5\frac{\pi}{3}} \end{aligned}\right\} \quad z_1 \cdot z_2 = 2\sqrt{2}\, e^{i\cdot\frac{23\pi}{12}}$$

b) $z_1 = i \qquad = e^{i\frac{\pi}{2}}$

$z_2 = \sqrt{3} + i = 2 e^{i\frac{\pi}{6}}$

$z_1 \cdot z_2 = i \cdot z_2$

$= 2 e^{i\frac{2\pi}{3}} = -1 + \sqrt{3}\, i$



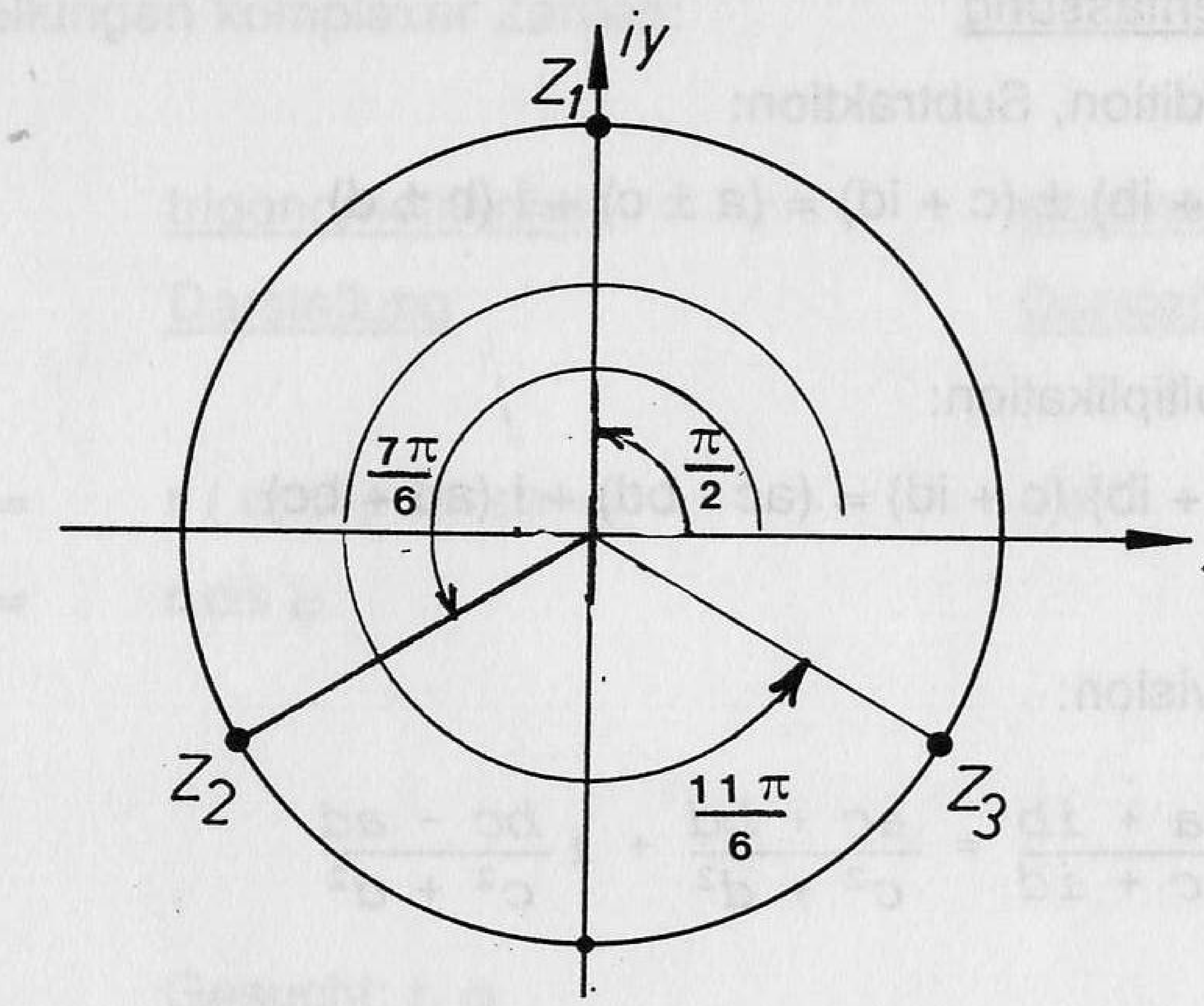
Multiplikation mit i ↔ Drehung um 90°

c) $\sqrt[3]{-i} = \sqrt[3]{e^{i\frac{3\pi}{2}}} = z$

$z_1 = e^{i\frac{\pi}{2}} = i$

$z_2 = e^{i\frac{7\pi}{6}}$

$z_3 = e^{i\frac{11\pi}{6}}$



4) Die Euler´schen Relationen lassen sich auch umkehren:

$$\frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} = \cos\varphi$$

$$\frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i} = \sin\varphi$$

Zusammenfassung

(1) Addition, Subtraktion:

$$(a + ib) \pm (c + id) = (a \pm c) + i\,(b \pm d)$$

(2) Multiplikation:

$$(a + ib)(c + id) = (ac - bd) + i\,(ad + bc)$$

(3) Division:

$$\frac{a + ib}{c + id} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + i\,\frac{bc - ad}{c^2 + d^2}$$

(4) Betrag:

$$|a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Es gilt:

(i) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

(ii) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$

(iii) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

(5) konjugiert komplexe Zahlen:

$z = a + ib$ $\qquad \bar{z} = a - ib$ ist zu z konjugiert komplex

Es gilt:

(i) $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$

(ii) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$

(iii) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$

(6) verschiedene Darstellungen komplexer Zahlen:

Kartesische Darstellung		trigonometrische Darstellung		exponentielle Darstellung
$z = a + bi$	=	$r\,(\cos\varphi + i \sin\varphi)$	=	$r\,e^{i\varphi}$
	=	$r \operatorname{cis}\varphi$		

Umrechnung:

Gegeben: a, b $\qquad$ Gesucht: r, φ

$$\left.\begin{array}{l} r = \sqrt{a^2 + b^2}\,, \quad \tan\varphi = \frac{b}{a} \\ (+\ \mathit{Skizze!}) \end{array}\right\} \rightarrow \varphi$$

Gegeben: r, φ $\qquad$ Gesucht: a, b

$a = r\cos\varphi\,,$ $\qquad b = r\sin\varphi$

Beachte:

(i) $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$

(ii) Multiplikation in trigonometrischer Darstellung

$$(r_1 \operatorname{cis}\varphi_1) \cdot (r_2 \operatorname{cis}\varphi_2) = r_1 r_2 \operatorname{cis}(\varphi_1 + \varphi_2)$$

(iii) Potenzen

$$(r \operatorname{cis}\varphi)^n = r^n \operatorname{cis}(n\varphi)$$

Übungsaufgaben:

1. Man berechne r und φ für folgende Zahlen:

a) $z = -\frac{1}{a} + 2i$ d) $z = 3i$

b) $z = -3 - 4i$ e) $z = 5$

c) $z = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ f) $z = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

Skizze!

2. Führe in die Form a + bi:

a) $\sqrt{8}\,cis\frac{\pi}{4}$ b) $4\,cis\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ c) $\frac{1}{2}e^{5\frac{\pi}{4}i}$

3. a) $\frac{1+i}{1-i} + \frac{1-i}{1+i}$ c) $\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^6$

b) $(1+i)^{22}$

4. a) Gesucht sind alle Lösungen der Gleichung $z^3 = -8$.

b) $\sqrt{1+i}$

c) Gesucht sind alle Lösungen der Gleichung $x^2 + 2\sqrt{3}\cdot x + 4 = 0$ in exponentieller Darstellung.

5. Beweise: i^i ist reell.

Lösungen:

1. a) r = 2.06 φ = 1.8158 (104.04°)

b) r = 5 φ = 4.0689 (233.13°)

c) r = 1 φ = 2π/3 (120°)

d) r = 3 φ = π/2 (90°)

e) r = 5 φ = 0 (0°)

2. a) 2 + 2i b) - 4i c) $-\frac{1}{\sqrt{8}}(1+i)$

3. a) 0 b) $2^{11}\cdot e^{i\frac{3\pi}{2}} = -2048i$ c) 1

4. a) $z_1 = 2\cdot e^{i\cdot\frac{\pi}{3}} = 1 + i\sqrt{3}$ $z_2 = 2\cdot e^{i\pi} = -2$

$z_3 = 2\cdot e^{i\frac{5\pi}{3}} = 1 - i\sqrt{3}$

b) $z_1 = \sqrt[4]{2}\cdot e^{i\frac{\pi}{8}} = 1.10 + 0.46i$

$z_2 = \sqrt[4]{2}\cdot e^{i\frac{9\pi}{8}} = -1.10 - 0.46i$

5. $e^{-\pi/2} = 0.2079$

LITERATURVERZEICHNIS

1. **Baumol W.J.**
   Economic Dynamics: An Introduction, Macmillan Company, New York, 1970

2. **Chiang A.C.**
   Fundamental Methods of Mathematical Economics, Verlag McGraw-Hill, International Student Edition, New York 1984

3. **Edwards C.H. Jr., Penney D.E.**
   Elemantary Differential Equations with Applications, Prentice Hall, 1989

4. **Goldberg S.**
   Difference Equations, John Wiley, New York, 1986

5. **Peitgen H.-O., Jürgens H., Saupe D.**
   Fractals for the Classroom, Part 2, Springer-Verlag, New York, 1992

6. **Rommelfanger H.**
   Differenzen- und Differentialgleichungen, Bibliographisches Institut, Mannheim, Wien, Zürich, 1986

7. **Takayama A.**
   Mathematical Economics, Cambridge University Press, 1985