M A T H E M A T I K

F Ü R

Ö K O N O M E N

Band 2

von

Margrit Gauglhofer
Heinz Müller

20. Auflage

2013

Verlag Wilhelm Surbir
Wittenbach / SG

Prof. Dr. Margrit Gauglhofer und Prof. Dr. Heinz Müller

Verlag Wilhelm Surbir
Betten 10, CH-9303 Wittenbach, Tel. und Fax. +41 (0) 71 298 36 16, Email verlag@surbir.ch

VORWORT

Als Fortsetzung von Band 1 widmet sich auch der vorliegende Band 2 der mathematischen Grundausbildung künftiger Ökonomen.

Es werden behandelt:

- Vektor- und Matrizenrechnung
- Lineare Gleichungssysteme
- Einfache Differenzengleichungen

Auch im Band 2 steht die anschauliche Präsentation im Hinblick auf die Anwendungen im sozialwissenschaftlichen Bereich im Vordergrund.

Besonderer Dank gebührt Andrea Haidorfer Nikolenkov, Roger Baumann und David Schiess für ihre wertvolle Mitarbeit. Von grosser Wichtigkeit war die Unterstützung von Niklaus Wallimann und Cornelia Neumann, die das anspruchsvolle Manuskript in einwandfreier Form auf den Computer gebracht haben.
Dem Verlag Surbir danken wir für die rechtzeitige Herausgabe des neuen Bandes.

St. Gallen, im Dezember 2012

Margrit Gauglhofer Heinz Müller

INHALTSVERZEICHNIS

I. MATRIZEN - ALGEBRA

1 EINFÜHRUNG, DEFINITIONEN, ADDITION UND SUBTRAKTION VON MATRIZEN

Beispiel I.1

Ein Fabrikant von Fertigteil-Häusern stellt Häuser der Typen 1, 2 und 3 her. Sein Bedarf an Stahl (S), Holz (H), Glas (G), Farbe (F) ***pro Haus*** *sei dargestellt durch folgendes Schema:*

$$\begin{array}{c c} & \begin{matrix} S & H & G & F \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 5 & 20 & 16 & 7 \\ 7 & 18 & 12 & 9 \\ 6 & 25 & 8 & 5 \end{pmatrix} \end{array} = \mathrm{B}\ (\text{Bedarfsmatrix})$$

Ein solches rechteckiges Schema heisst ***Matrix****.*

Der Lieferant für Holz interessiert sich nur für den Bedarf an Holz; dieser wird dargestellt durch einen sogenannten ***Kolonnen****- oder* ***Spaltenvektor***

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 20 \\ 18 \\ 25 \end{pmatrix}$$

Interessieren wir uns z.B. nur für ein Haus vom Typus 3, so wird der Bedarf beschrieben durch einen sogenannten ***Zeilenvektor***

$$\mathbf{y}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 6 & 25 & 8 & 5 \end{pmatrix}$$

Allgemein: Ein rechteckiges Schema von reellen Zahlen

$$A = \left(\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1\,n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2\,n} \\ . & & & . \\ . & & a_{ij} & . \\ . & & & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \\ \longleftarrow \text{Zeile } i \\ \\ \\ \end{array} \qquad \begin{array}{l} i = 1, 2, \ldots, m \\ j = 1, 2, \ldots, n \end{array}$$

$$\uparrow$$

Kolonne j

heisst **Matrix**.

Der 1. Index i bezeichnet die Zeilennummer, der 2. Index j bezeichnet die Kolonnennummer des Elementes a_{ij}.

Hat A m Zeilen und n Kolonnen, so bezeichnet man A als A_{mn} oder A_{mxn} und nennt die Matrix eine “m mal n” Matrix.

Bemerkung: Häufig wird folgende Schreibweise verwendet

$$A_{mn} = (a_{ij}), \qquad i = 1, 2, \ldots, m, \qquad j = 1, 2, \ldots, n$$

Beispiel I.2

$A_{2x3} = (a_{ij})$, wobei $a_{ij} = i + j^2$

definiert die Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 10 \\ 3 & 6 & 11 \end{pmatrix}$

Beispiel I.3

$$B_{4x3} = (b_{ij}) \quad , \textit{wobei } \mathrm{b_{ij}} = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad \mathrm{i} \geq \mathrm{j} \\ 0 & \text{für} \quad \mathrm{i} < \mathrm{j} \end{cases}$$

$$\textit{definiert die Matrix } \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Spezialfälle

$$\mathrm{A_{mx1}} = \mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathrm{x}_1 \\ . \\ . \\ . \\ \mathrm{x}_m \end{pmatrix}$$ heisst **Kolonnenvektor** oder **Spaltenvektor**

$\mathrm{A_{1xn}} = \mathbf{y}^{\mathrm{T}} = (\mathrm{y}_1, \mathrm{y}_2, \ldots \mathrm{y_n})$ heisst **Zeilenvektor**

Gleichheit zweier Matrizen:
Zwei Matrizen mit gleicher Zeilenzahl und gleicher Kolonnenzahl heissen **gleich**, wenn die entsprechenden Elemente gleich sind:

$$\mathrm{A_{mxn}} = \mathrm{B_{mxn}}, \text{ wenn } \mathrm{a_{ij}} = \mathrm{b_{ij}} \quad , \text{ für alle } \begin{cases} \mathrm{i} = 1, 2, \ldots \mathrm{m} \\ \mathrm{j} = 1, 2, \ldots \mathrm{n} \end{cases}$$

Beispiel I.4

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 7 & -1 \end{pmatrix} \text{heisst :}$$

$$x = 3 \quad y = 4 \quad z = 7 \quad u = -1$$

Addition und Subtraktion von Matrizen:

Zwei Matrizen gleicher Dimension werden **addiert**, indem die entsprechenden Elemente addiert werden:

$$A_{mxn} + B_{mxn} = C_{mxn}, \text{wobei} \quad c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \text{ für alle } \begin{cases} i = 1, \dots m \\ j = 1, \dots n \end{cases}$$

Subtraktion:

$$A_{mxn} - B_{mxn} = D_{mxn}, \text{wobei} \quad d_{ij} = a_{ij} - b_{ij}, \text{ für alle } \begin{cases} i = 1, \dots m \\ j = 1, \dots n \end{cases}$$

Beispiel I.5

$$\begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$$

Beispiel I.6

$$\begin{pmatrix} 19 & 3 & 1 \\ 5 & 7 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 8 & 9 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & -5 & -8 \\ 2 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

Beispiel I.7

Die Addition $\begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

kann dagegen nicht durchgeführt werden.

Multiplikation einer Matrix mit einer reellen Zahl

Eine Matrix wird mit einer reellen Zahl (einem sogenannten "Skalar") multipliziert, indem jede Komponente mit der Zahl multipliziert wird:

Definition:

$$\mathrm{A} = (\mathrm{a_{ij}})$$

$$\mathrm{c\,A} = (\mathrm{c\,a_{ij}}); \quad \text{für alle} \begin{cases} \mathrm{i} = 1, \ldots \mathrm{m} \\ \mathrm{j} = 1, \ldots \mathrm{n} \end{cases}$$

Beispiel I.8

$$7 \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 & -7 \\ 0 & 35 \end{pmatrix}$$

Beispiel I.9

$$0 \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 4 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Distributives Gesetz (Skalar mal Matrix):

$c(A + B) = cA + cB \quad , c \in \mathbb{R}$

Beispiel I.10

$$5\left[\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 15 & 20 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}\right] = 5\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 14 & 25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 35 \\ 70 & 125 \end{pmatrix}$$

$$5\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 15 & 20 \end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 25 \\ 75 & 100 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ -5 & 25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 35 \\ 70 & 125 \end{pmatrix}$$

2 MULTIPLIKATION VON MATRIZEN

2.1 "Skalarprodukt" zweier Vektoren

Beispiel I.11

Jemand kauft 2 kg Äpfel, 1 kg Kaffee, 3 kg Brot und 0,5 kg Fleisch zu kg-Preisen von 1.-, 6.30.-, 1.20.- und 16.50.-. Wieviel wird total ausgegeben?

Bedarfsvektor: $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 0.5 \end{pmatrix}$ *Preisvektor:* $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 1.00 \\ 6.30 \\ 1.20 \\ 16.50 \end{pmatrix}$

Kosten: $\sum_{i=1}^{4} \mathrm{b_i p_i} = 2 + 6.3 + 3.6 + 8.25 = 20.15$

Allgemein:

Das **Skalar-Produkt** zweier Vektoren mit gleich vielen Komponenten

$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} \mathrm{a}_1 \\ . \\ . \\ \mathrm{a}_n \end{pmatrix}$ und $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} \mathrm{b}_1 \\ . \\ . \\ \mathrm{b}_n \end{pmatrix}$ ist definiert als $\mathbf{a} \bullet \mathbf{b} = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{a}_i \mathrm{b}_i$

Bemerkungen:

1. Das Ergebnis ist eine **reelle Zahl** oder ein **Skalar**
2. In Hinblick auf die Matrizenmultiplikation stellt man das Skalarprodukt häufig wie folgt dar:

$$\mathbf{a} \bullet \mathbf{b} = \mathbf{a}^T \mathbf{b} = (a_1, \dots, a_n) \begin{pmatrix} b_1 \\ . \\ . \\ b_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

2.2 Produkt einer Matrix mit einem Vektor

Beispiel I.12

In Übereinstimmung mit dem Einführungsbeispiel von S.1 ist die Bedarfsmatrix zur Herstellung von 3 Typen von Fertighäusern mittels 4 Materialien gegeben durch

$$\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 5 & 20 & 16 & 7 \\ 7 & 18 & 12 & 9 \\ 6 & 25 & 8 & 5 \end{pmatrix}$$

Der Preisvektor für die Materialien ist durch

.

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \\ 100 \\ 50 \end{pmatrix}$$

gegeben. D.h. die Preise für Stahl (S), Holz (H), Glas(G) und Farbe (F) betragen Fr. 200.-, 100.-, 100.-, 50.

Die Materialkosten $k_1, \mathrm{k}_2, \mathrm{k}_3$ *für die Haustypen 1, 2, 3 lassen sich wie folgt ermitteln:*

$$\textit{Haustyp 1:}\quad k_1 = \begin{pmatrix} 5 & 20 & 16 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \\ 100 \\ 50 \end{pmatrix} = 4'950$$

$$\textit{Haustyp 2:}\quad k_2 = \begin{pmatrix} 7 & 18 & 12 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \\ 100 \\ 50 \end{pmatrix} = 4'850$$

$$\textit{Haustyp 3:}\quad k_3 = \begin{pmatrix} 6 & 25 & 8 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \\ 100 \\ 50 \end{pmatrix} = 4'750$$

Der Kostenvektor kann nun wie folgt berechnet werden:

$$k = \begin{pmatrix} \mathrm{k}_1 \\ \mathrm{k}_2 \\ \mathrm{k}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 20 & 16 & 7 \\ 7 & 18 & 12 & 9 \\ 6 & 25 & 8 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \\ 100 \\ 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4'950 \\ 4'850 \\ 4'750 \end{pmatrix}$$

Allgemein:

Das Produkt A**x** einer (m×n)-Matrix A mit einem (n×1)-Vektor ist definiert durch den

(m×1)-Vektor $$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} \mathrm{y}_1 \\ . \\ . \\ \mathrm{y}_m \end{pmatrix} = \mathrm{A}\mathbf{x},$$

wobei $\mathrm{y_i} = \sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{n}} \mathrm{a_{ik}x_k} = \mathrm{a_{i1}x_1} + \mathrm{a_{i2}x_2} + \cdots + \mathrm{a_{in}x_n}$, für alle i = 1, …,m

2.3 Produkt zweier Matrizen

Beispiel I.13

Der Materialbedarf zur Herstellung von Haustypen sei weiterhin durch die Matrix

$$\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 5 & 20 & 16 & 7 \\ 7 & 18 & 12 & 9 \\ 6 & 25 & 8 & 5 \end{pmatrix}$$

gegeben.

Die Nachfragematrix A stellt die Nachfrage nach den Haustypen 1, 2 und 3 in den Monaten 1 und 2 dar.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \textit{Haustyp I} & \textit{Haustyp II} & \textit{Haustyp III} \end{array} \\ A = & \begin{pmatrix} 7 & 2 & 12 \\ 3 & 8 & 10 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \textit{Monat 1} \\ \textit{Monat 2} \end{array} \end{array}$$

Der Materialverbrauch in den Monaten 1 und 2 lässt sich folgendermassen ermitteln:

$$\textit{Stahlverbrauch im 1. Monat:} \quad \begin{pmatrix} 7 & 2 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix} = 121$$

$$\textit{Holzverbrauch im 2. Monat:} \quad \begin{pmatrix} 3 & 8 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 20 \\ 18 \\ 25 \end{pmatrix} = 454$$

Entsprechend erhalten wir die Verbrauchsmatrix C für Stahl, Holz, Glas und Farbe für die beiden Monate durch Multiplikation:

$$\begin{pmatrix} 7 & 2 & 12 \\ 3 & 8 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 20 & 16 & 7 \\ 7 & 18 & 12 & 9 \\ 6 & 25 & 8 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 121 & 476 & 232 & 127 \\ 131 & 454 & 224 & 143 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{1. Monat} \\ \text{2. Monat} \end{array}$$

Allgemein:

Das Produkt AB zweier Matrizen kann gebildet werden, wenn die **Anzahl Kolonnen der ersten gleich der Anzahl Zeilen der zweiten ist.**

$$A_{mxn}\,B_{nxp} = C_{mxp} \quad , \ \text{wobei}$$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$$

$$\text{für alle} \begin{cases} i \ = \ 1, \ldots, m \\ \\ j \ = \ 1, \ldots, p \end{cases}$$

Bemerkung:

Das Element c_{ij} in der i-ten Zeile und j-ten Kolonne der Produktmatrix ist das Skalarprodukt des i-ten Zeilenvektors von A mit dem j-ten Kolonnenvektor von B.

Schematisch kann die Multiplikation folgendermassen dargestellt werden:

$$\begin{array}{c|cc|c|cc|}
\cline{2-6}
 & b_{11} & \ldots & b_{1j} & \ldots & b_{1p} \\
 & b_{21} & \ldots & b_{2j} & \ldots & b_{2p} \\
 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
 & b_{n1} & \ldots & b_{nj} & \ldots & b_{np} \\
\hline
\multicolumn{1}{|c|}{a_{11}\ a_{12} \ldots a_{1n}} & & & & & \\
\multicolumn{1}{|c|}{\ldots\ldots} & & & & & \\
\cline{1-4}
\multicolumn{1}{|c|}{a_{i1}\ a_{i2} \ldots a_{in}} & & & c_{ij} & & \\
\cline{1-4}
\multicolumn{1}{|c|}{\ldots\ldots} & & & & & \\
\multicolumn{1}{|c|}{a_{m1}\ a_{m2} \ldots a_{mn}} & & & & & \\
\hline
\end{array}$$

Eigenschaften der Matrizenmultiplikation

1. $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$; $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 & 6 \\ 1 & 1 & 0 & 7 \\ 6 & 4 & 7 & 0 \end{pmatrix}$

			3	2	3	6	
			1	1	0	7	$\mathrm{B}_{3\times4}$
			6	4	7	0	
2	1	3	25	17	27	19	
1	4	5	37	$\boxed{26}$	38	34	$\mathrm{AB} = \mathrm{C}_{2\times4}$
	$\mathrm{A}_{2\times3}$						

Zum Beispiel ist $c_{22} = 1\cdot2 + 4\cdot1 + 5\cdot4 = 26$

2. Sind $\mathrm{A}_{\mathrm{nxn}}$ und $\mathrm{B}_{\mathrm{nxn}}$ zwei quadratische Matrizen gleicher Dimension, so können AB **und** BA gebildet werden.

Beispiel I.14

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 17 & 35 \\ 20 & 42 \end{pmatrix} \qquad BA = \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 40 & 62 \end{pmatrix}$$

Im Allgemeinen gilt:

$$\boxed{\mathrm{AB} \neq \mathrm{BA}}.$$

Die Matrizenmultiplikation ist **nicht kommutativ**.

3. Es sei

$$A_{2x2} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad B_{2x3} = \begin{pmatrix} -8 & 0 & 7 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad C_{3\times 2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Produkte (AB)C und A(BC) können gebildet werden.

Frage: Ist (AB)C = A(BC)?

$$AB = \begin{pmatrix} -37 & 9 & 41 \\ 5 & 15 & 10 \end{pmatrix} \quad (AB)C = \begin{pmatrix} 250 & 68 \\ 75 & 55 \end{pmatrix}$$

$$BC = \begin{pmatrix} 41 & 7 \\ 15 & 11 \end{pmatrix} \qquad A(BC) = \begin{pmatrix} 250 & 68 \\ 75 & 55 \end{pmatrix}$$

d.h. (AB)C = A(BC)

Bemerkung:

Sofern die nötigen Dimensionsbedingungen erfüllt sind (d.h. falls sich die Multiplikationen ausführen lassen), gilt stets

$$(AB)C = A(BC).$$

D.h. die Matrizenmultiplikation ist **assoziativ.**

4. **Frage**: Gibt es eine Matrix, welche die Rolle der "Null" übernimmt, d.h. eine Matrix 0, so dass

$$A + 0 = A$$

Definition: “Nullmatrix“

$$0_{m\,x\,n} \;=\; \left.\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0\ldots0 \\ 0 & \\ . & \\ . & \\ . & \\ 0 & \ldots0 \end{pmatrix}}_{\text{n Kolonnen}}\right\}\text{m Zeilen}$$

Beispiel I.15

$$\begin{array}{ccccc} \begin{pmatrix} 4 & 6 & -2 \\ 5 & 7 & 0 \end{pmatrix} & + & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} 4 & 6 & -2 \\ 5 & 7 & 0 \end{pmatrix} \\ A_{2x3} & + & 0_{2x3} & = & A_{2x3} \end{array}$$

5. **Frage**: Gibt es eine Matrix, die die Rolle der “Eins“ übernimmt, d.h. eine Matrix I, so dass

$$AI = A \qquad \text{und} \qquad IA = A?$$

Wir definieren die **Einheitsmatrix** oder **Identität** als

$$I_{n\,x\,n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ . & & & & \\ . & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix} \text{, d.h. } a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j \\ 0 & \text{für } i \neq j \end{cases}$$

Für quadratische Matrizen A_{nxn} gilt dann:

$$A_{nxn}I_{nxn} = A_{nxn} \quad , \; I_{nxn}A_{nxn} = A_{nxn}$$

Beispiel I.16

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}, \mathrm{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{AI} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} = A$$

$$\mathrm{IA} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} = A$$

6. Aus dem Rechnen mit reellen Zahlen kennen wir die Regel:

$$\mathrm{ab} = 0 \Rightarrow \mathrm{a} = 0 \text{ oder } \mathrm{b} = 0.$$

In der Matrizenalgebra gilt die entsprechende Regel nicht. Das Produkt zweier von der Nullmatrix verschiedener Matrizen A und B kann 0 sein (A und B heissen dann "Nullteiler").

Beispiel I.17

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad , \quad \mathrm{B} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{AB} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\boxed{\mathrm{AB} = 0 \not\Rightarrow \mathrm{A} = 0 \text{ oder } \mathrm{B} = 0}$$

7. Für reelle Zahlen gilt:

$$\text{Aus } cd = ce,\ c \neq 0, \text{ folgt: } d = e$$

In der Matrizenalgebra gilt die entsprechende Regel nicht.

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 9 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$CD = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 15 & 24 \end{pmatrix} \quad CE = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 15 & 24 \end{pmatrix}$$

$CD = CE$, aber $D \neq E$

$$\boxed{CD = CE \not\Rightarrow D = E}$$

Im nächsten Abschnitt befassen wir uns mit besonderen quadratischen Matrizen C, für welche die Folgerung

$$CD = CE \Rightarrow D = E$$

zulässig ist.

3 BEGRIFF DER INVERSEN EINER QUADRATISCHEN MATRIX

Definition:

Es sei A_{nxn} eine quadratische Matrix. Falls eine Matrix A_{nxn}^{-1} existiert, für die gilt $A^{-1}A = AA^{-1} = I$, so nennt man $\mathbf{A^{-1}}$ die **Inverse von A**.

Beispiel I.18

Man bestimme die zu $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}$ *inverse Matrix A^{-1}.*

Ansatz: $A^{-1} = \begin{pmatrix} x & u \\ y & v \end{pmatrix}$

Bedingung: $AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & u \\ y & v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$

ergibt die Gleichungen:

$$\begin{array}{cc}
x + 4y = 1 \;\; |\cdot(-2) & u + 4v = 0 \;\; |\cdot(-2) \\
2x + 9y = 0 & 2u + 9v = 1 \\
\hline
y = -2 & v = 1 \\
x = 9 & u = -4
\end{array}$$

Daraus resultiert die Inverse $A^{-1} = \begin{pmatrix} 9 & -4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

Beispiel I.19

$$\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -5 \\ -18 & 1 & 24 \\ -3 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \textit{und} \;\; B^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -6 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \textit{sind zueinander invers.}$$

Nachweis:

Durch Ausmultiplizieren findet man: $\quad \mathrm{BB}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{I}$

Beispiel I.20

Besitzt auch die Matrix $\mathrm{C} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$ *eine Inverse?*

Der Ansatz $\quad \mathrm{C}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathrm{x} & \mathrm{u} \\ \mathrm{y} & \mathrm{v} \end{pmatrix}$

führt auf $\quad \mathrm{CC}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{x} & \mathrm{u} \\ \mathrm{y} & \mathrm{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{I}$

und somit

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{x} - 2\mathrm{y} = 1 \;\; |\cdot 3 & \qquad & \mathrm{u} - 2\mathrm{v} = 0 \;\; |\cdot 3 \\ -3\mathrm{x} + 6\mathrm{y} = 0 & & -3\mathrm{u} + 6\mathrm{v} = 1 \\ \hline 0 = 3 & & 0 = 1 \\ \textit{Widerspruch!} & & \textit{Widerspruch!} \end{array}$$

Die Matrix C besitzt ***keine*** *Inverse!*

$$\boxed{\text{Nicht jede quadratische Matrix besitzt eine Inverse.}}$$

Frage: Welche Matrizen $A_{2\times 2}$ besitzen eine Inverse?

Es sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

Ansatz: $A^{-1} = \begin{pmatrix} x & u \\ y & v \end{pmatrix}$

Bedingung: $AA^{-1} = I$, d.h.

$$\begin{array}{ll} ax + by = 1 \mid \cdot\, d & au + bv = 0 \mid \cdot\, d \\ cx + dy = 0 \mid \cdot\, (-b) & cu + dv = 1 \mid \cdot\, (-b) \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} (ad - bc)x = d & (ad - bc)u = -b \end{array}$$

$$x = \frac{d}{ad - bc} \qquad u = \frac{-b}{ad - bc}$$

$$y = \frac{-c}{ad - bc} \qquad v = \frac{a}{ad - bc}$$

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}}$$

Folgerung:

$$A^{-1} \text{ existiert} \Leftrightarrow ad - bc \neq 0$$

Wir werden später (Kapitel 2.2) ein allgemeines Kriterium kennenlernen, das angibt, zu welchen Matrizen eine Inverse existiert. Ebenfalls werden wir ein abgekürztes Rechenverfahren zur Berechnung der Inversen behandeln. (Kapitel 2.5)

Eigenschaften inverser Matrizen

$$\boxed{\begin{array}{l} 1)\ (A^{-1})^{-1} = A \\ 2)\ (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} \end{array}}$$

Nachweis von 2): Die Inverse von AB sei C.

Es ist dann

$$\begin{aligned} CAB &= I \qquad\qquad | \text{ mit } B^{-1}A^{-1} \text{ von rechts multiplizieren} \\ CA\underbrace{BB^{-1}}_{=I}A^{-1} &= IB^{-1}A^{-1} = B^{-1}A^{-1} \\ C\underbrace{AA^{-1}}_{=I} &= B^{-1}A^{-1} \\ C &= B^{-1}A^{-1} \end{aligned}$$

Folgerung: $C = (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

4 DIE TRANSPONIERTE EINER MATRIX, SYMMETRISCHE MATRIZEN

Häufig ist es von Vorteil, die Rollen der Zeilen und Kolonnen einer Matrix zu vertauschen.

So kann z.B. die Bedarfsmatrix

$$B = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} S & H & G & F \end{array} \\ \begin{pmatrix} 5 & 20 & 16 & 7 \\ 7 & 18 & 12 & 9 \\ 6 & 25 & 8 & 5 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}$$

des Einführungsbeispieles ebensogut folgendermassen dargestellt werden:

$$\begin{array}{c|c} & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{c} S \\ H \\ G \\ F \end{array} & \begin{pmatrix} 5 & 7 & 6 \\ 20 & 18 & 25 \\ 16 & 12 & 8 \\ 7 & 9 & 5 \end{pmatrix} \end{array} = B^T$$

Definition:

Die **Transponierte** einer Matrix $A_{m \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ . & & \\ . & & \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$

ist die Matrix $A^T_{n \times m} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ . & & & \\ . & & & \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$

Bemerkung:

In der Literatur wird für die transponierte Matrix A^T auch das Symbol A' verwendet.

Beispiel I.21

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 8 & -9 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad A^T = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 8 & 0 \\ -9 & 4 \end{pmatrix}$$

Beispiel I.22

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 7 \\ 4 & 7 & 2 \end{pmatrix} \quad B^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 7 \\ 4 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$

Definition:

Erfüllt die Transponierte B^T einer quadratischen Matrix B die Bedingung $\mathbf{B^T = B}$, so heisst B **symmetrisch** (d.h. $a_{ij} = a_{ji}$ für alle i, j).

Eigenschaften transponierter Matrizen:

1)	$(A^T)^T$	$= A$
2)	$(A+B)^T$	$= A^T + B^T$
3)	$(AB)^T$	$= B^T A^T$

Beispiel I.23

Für die Matrizen $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ *und* $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$

weise man die Gültigkeit der Regel 3) nach.

$$AB = \begin{pmatrix} 12 & 13 \\ 24 & 25 \end{pmatrix} \qquad (AB)^T = \begin{pmatrix} 12 & 24 \\ 13 & 25 \end{pmatrix}$$

$$B^T A^T = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ -1 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 24 \\ 13 & 25 \end{pmatrix}$$

Somit gilt im Beispiel

$(\mathrm{AB})^T = \mathrm{B}^T\mathrm{A}^T$

$$\boxed{4)\ (\mathrm{A}^{\mathrm{T}})^{-1} = (\mathrm{A}^{-1})^{\mathrm{T}}}$$

Nachweis:

Aus: $(\mathrm{AA}^{-1})^{\mathrm{T}} = \mathrm{I}^{\mathrm{T}} = \mathrm{I}$

erhält man $(\mathrm{A}^{-1})^{\mathrm{T}}\ \mathrm{A}^{\mathrm{T}} = \mathrm{I}$ (gemäss 3))

Multiplikation von rechts mit $(\mathrm{A}^{\mathrm{T}})^{-1}$ ergibt

$$\left(\mathrm{A}^{-1}\right)^{\mathrm{T}} \underbrace{\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\,(\mathrm{A}^{\mathrm{T}})^{-1}}_{=\mathrm{I}} = \mathrm{I}\,(\mathrm{A}^{\mathrm{T}})^{-1} = (\mathrm{A}^{\mathrm{T}})^{-1}$$

und es folgt $(\mathrm{A}^{-1})^{\mathrm{T}} = \left(\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\right)^{-1}$

Aufgaben:

1. *Man beweise:* $(\mathrm{B}^{-1}\mathrm{A}^{-1})^{-1}\left(\mathrm{B}^{\mathrm{T}}\mathrm{B}\right)^{-1}\left(\mathrm{A}\left(\mathrm{B}^{-1}\right)^{\mathrm{T}}\right)^{-1} = I$

2. *Es sei* $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$

   Man berechne: AA^{T}

3. *Beweise: Für jede Matrix M gilt:* MM^{T} *ist symmetrisch.*

5 DETERMINANTEN

Jeder quadratischen Matrix A_{nxn} wird eine **reelle Zahl** zugeordnet, die **Determinante** det(A), oder |A|.

a. **n = 2**

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) \quad \text{mit } \mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}, \ \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = |A| = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$$

Schematisch:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}^{-}_{+}$$

Beispiel I.24

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 4 \\ 8 & 5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 8 & 24 \end{pmatrix}$$

det (A) = |A| = 10 · 5 - 8 · 4 = 18

det (B) = |B| = 3 ·(-1) - 0 · 5 = -3

det (C) = |C| = 2 · 24 - 8 · 6 = 0

Hinweis:

Das Resultat von S. 19 lässt sich nun mit Hilfe von Determinanten formulieren. Für Matrizen $A_{2\times 2}$ gilt:

$$A^{-1} \text{ existiert} \Leftrightarrow \det(A) \neq 0$$

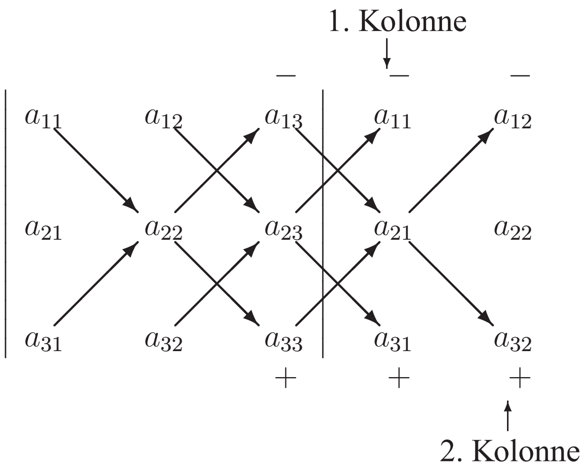
Später werden wir sehen, dass diese Aussage für beliebige quadratische Matrizen $A_{n\times n}$ gilt.

b. **n = 3**

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$$

$$\det(A) = |A| = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{31}a_{23} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{31}a_{22}$$

Für Matrizen A_{3x3} kann die Determinante gemäss folgendem Schema berechnet werden:



Beispiel I.25

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{ccc|cc} 2 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & 4 & 5 \\ 7 & 8 & 9 & 7 & 8 \end{array}$$

det(A) = |A| = *90 + 42 + 96 - 105 - 96 - 36 = -9*

Beispiel I.26

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & 3 & 8 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 5 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 8 & 3 & 3 \end{array}$$

det(B) = $|B|$ = *8 + 30 + 18 - 9 - 15 - 32 = 0*

c. **n > 3**

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & & & \\ . & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Wir führen folgende Abkürzungen ein:

Die **Teilmatrix** $\mathbf{A}_{ij}$ (auch **Minorante** genannt) der Matrix A entsteht durch Weglassen der i-ten Zeile und der j-ten Kolonne.

Beispiel I.27

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad A_{31} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Für Matrizen $A_{n\times n}$ ist die Determinante wie folgt definiert:

Definition: $|A| = a_{11}\,|A_{11}| \; - a_{12}\,|A_{12}| \; + a_{13}\,|A_{13}| \; - \cdots + (-1)^{n+1}a_{1n}\,|A_{1n}|$

D.h., die Determinante einer $n\times n$-Matrix wird auf n Determinanten von (n - 1)×(n - 1)-Matrizen zurückgeführt.

Bemerkungen:

1. Diese allgemeine Definition der Determinante ist konsistent mit den Determinantenformeln für $n = 2, 3$.
2. Die Determinante kann auch nach einer beliebigen Zeile entwickelt werden:

   $$|A| = (-1)^{i+1}\,a_{i1}\,|A_{i1}| + (-1)^{i+2}\,a_{i2}\,|A_{i2}| + \cdots + (-1)^{i+n}\,a_{in}\,|A_{in}|$$

3. Bezeichnung: $(-1)^{i+j}\,|A_{ij}|$ heisst **Kofaktor** von a_{ij}.

Beispiel I.28

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -5 & 0 & 8 \\ 1 & 8 & 0 & 7 \\ 3 & 2 & 4 & 6 \\ 1 & 6 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$|A|$ *entwickeln wir nach der 1. Zeile:*

$$|A| = 0\cdot\begin{vmatrix} 8 & 0 & 7 \\ 2 & 4 & 6 \\ 6 & -1 & 0 \end{vmatrix} - (-5)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 3 & 4 & 6 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} + 0\cdot\begin{vmatrix} 1 & 8 & 7 \\ 3 & 2 & 6 \\ 1 & 6 & 0 \end{vmatrix} - 8\cdot\begin{vmatrix} 1 & 8 & 0 \\ 3 & 2 & 4 \\ 1 & 6 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 5\cdot(-43) - 8\cdot 30 = -455$$

Weitere Eigenschaften der Determinante:

1. **Satz**. $\boxed{|AB| = |A| \cdot |B|}$

Illustration

Für

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

berechne man det (A), det (B), det (AB)

det (A) = - 1 - 3 - 6 - 2 = - 12

det (B) = 2 + 1 + 2 = 5

$$AB = \begin{pmatrix} 8 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

det (AB) = - 48 - 6 - 6 = - 60

Für das Rechenbeispiel gilt somit

det (AB) = det (A) · det (B)

Folgerungen:

Da AA^{-1} = I, folgt:

det (AA^{-1}) = det (A) · det (A^{-1}) = det (I) = 1

Diese Gleichung lässt sich nur erfüllen, wenn

det (A) $\neq$ 0

Somit können wir folgern:

a. Eine **notwendige** Bedingung dafür, dass A^{-1} existiert, ist

$$\det(A) \neq 0$$

Später werden wir zeigen, dass diese Bedingung auch **hinreichend** ist.

b. $$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

2. **Satz**: $$\boxed{\left|A^T\right| = |A|}$$

Folgerungen:

a. Die Determinantenentwicklung kann auch nach einer beliebigen Spalte erfolgen

$$|A| = (-1)^{1+j} a_{1j}\,|A_{1j}| + (-1)^{2+j} a_{2j}\,|A_{2j}| + \cdots + (-1)^{n+j} a_{nj}\,|A_{nj}|$$

b. Falls eine Zeile oder eine Spalte einer Matrix $A_{n\times n}$ aus Nullen besteht, so gilt $|A| = 0$

Beispiel I.29

$$\begin{vmatrix} 1 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 3 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

Beispiel I.30

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 2 & 5 \\ 9 & 0 & -5 & 9 \\ 6 & 0 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

3. **Satz**:

> a) Die Determinante einer Matrix ändert sich nicht, wenn zu einer Spalte (Zeile) **ein beliebiges Vielfaches einer anderen Spalte (Zeile)** addiert (bzw. subtrahiert) wird.
>
> b) Wird eine Spalte einer Matrix mit einer Zahl u multipliziert, so resultiert die u-fache Determinante.

Beispiel I.31

$$\begin{array}{c} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 7 & 4 \\ 1 & -1 & 9 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 6 \end{vmatrix} \\ \mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad \mathbf{a}_3 \quad \mathbf{a}_4 \end{array} \overset{a)}{=} \begin{array}{c} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 7 & 0 \\ 1 & -1 & 9 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} \\ \mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad \mathbf{a}_3 \quad \mathbf{a}_4 - 2\mathbf{a}_1 \end{array} = 0$$

Beispiel I.32

$$\begin{vmatrix} 100 & 0 & 90 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 20 & 0 & 9 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \textit{- 90} \cdot \textit{Zeile 3} \\ \\ \\ \textit{- 20} \cdot \textit{Zeile 2} \end{array} \overset{a)}{=} \begin{vmatrix} 100 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{vmatrix}$$

$$\overset{b)}{=} 100 \cdot 9 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 900$$

Zusammenstellung der Gesetze der Matrizen-Algebra

Addition und Multiplikation

1a.	$A + B = B + A$	1b.	Im Allgemeinen: $AB \neq BA$
2a.	$(A + B) + C = A + (B + C)$	2b.	$(AB)\,C = A\,(BC)$
3a.	$A + 0 = A$	3b.	$AI = IA = A$, falls A quadratisch

Beachte:

4. $AB = 0 \not\Rightarrow A = 0$ oder $B = 0$

5. $AB = AC \not\Rightarrow B = C$

Distributiv-Gesetze

6. $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B, \qquad \lambda \in \mathbb{R}$

7. $A(B + C) = AB + AC$

   $(A + B)C = AC + BC$

Inverse und Transponierte

Definition von A^{-1}: $AA^{-1} = A^{-1}A = I$

8.	$(A^{-1})^{-1} = A$	10.	$(A^T)^T = A$
9.	$(AB)^{-1} = B^{-1}\,A^{-1}$	11.	$(A + B)^T = A^T + B^T$
		12.	$(AB)^T = B^T A^T$
		13.	$(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$

Determinanten

14. $\det\,(AB) = \det\,(A) \cdot \det\,(B)$

15. $\det\,(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$

16. $\det\,(A^T) = \det\,(A)$

Beachte:

A^{-1} existiert $\Leftrightarrow \det\,(A) \neq 0$

6 GEOMETRISCHE DEUTUNG VON VEKTOREN UND VEKTOROPERATIONEN

Allgemein wurden Vektoren als Spezialfälle von Matrizen definiert:

$$A_{1xn} = \mathbf{x}^T = (x_1, \ldots, x_n) \quad \text{oder} \quad A_{mx1} = \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ y_m \end{pmatrix}$$

Zeilenvektor Kolonnenvektor

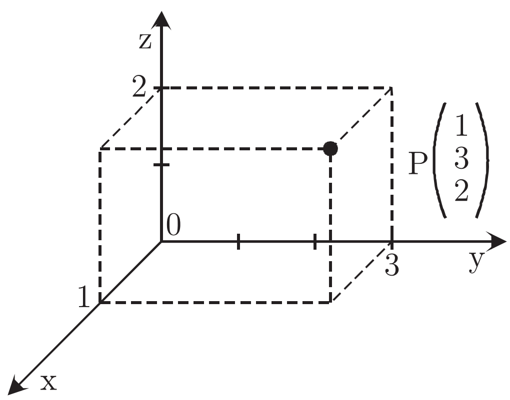
Vektoren mit zwei oder drei Komponenten lassen nun aber auch eine geometrische Deutung zu:

$$\text{Ein Vektor} \quad \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \quad \text{mit 2 Komponenten,}$$

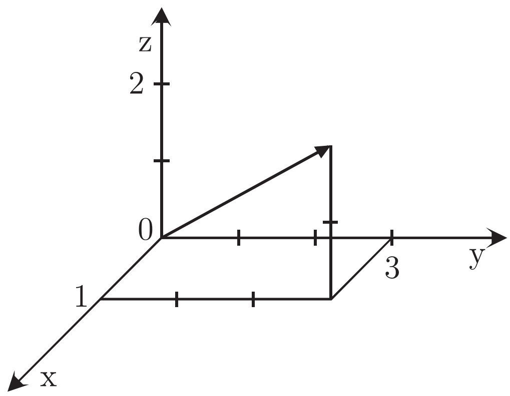
$$\text{beziehungsweise} \quad \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \quad \text{mit 3 Komponenten}$$

kann geometrisch gedeutet werden:

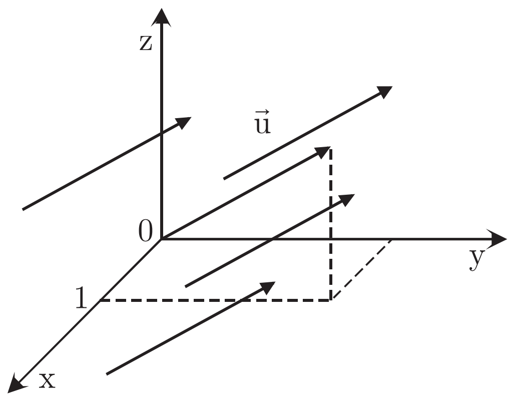
1. als Punkt P in der Ebene, bzw. im 3-dim. Raum



2. als "Pfeil" vom Ursprung 0 nach P ("Ortsvektor" $\overrightarrow{0P}$)



3. als (Klasse der) Pfeile der entsprechenden Länge und Richtung ("freier Vektor")

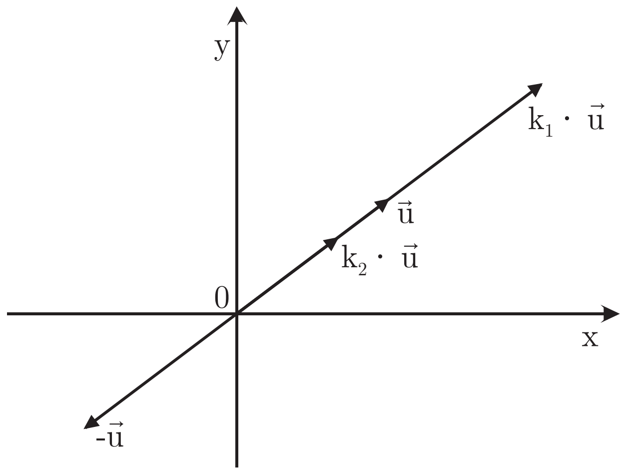


Vektor-Operationen

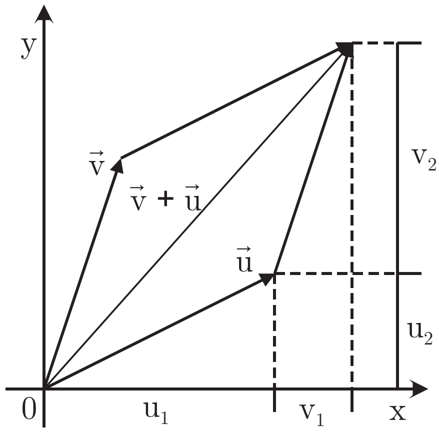
a. **Multiplikation einer reellen Zahl k mit einem Vektor**:

$$k \cdot \overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} ku_1 \\ ku_2 \end{pmatrix}$$

$k_1 > 1$	: Streckung
$0 < k_2 < 1$	: Verkürzung
$k = -1$	: Spiegelung



b. **Addition zweier Vektoren**



$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \end{pmatrix}$$

=Diagonale im von $\vec{u}$ und $\vec{v}$ aufgespannten Parallelogramm

c. **Linearkombinationen von Vektoren**

Definition:

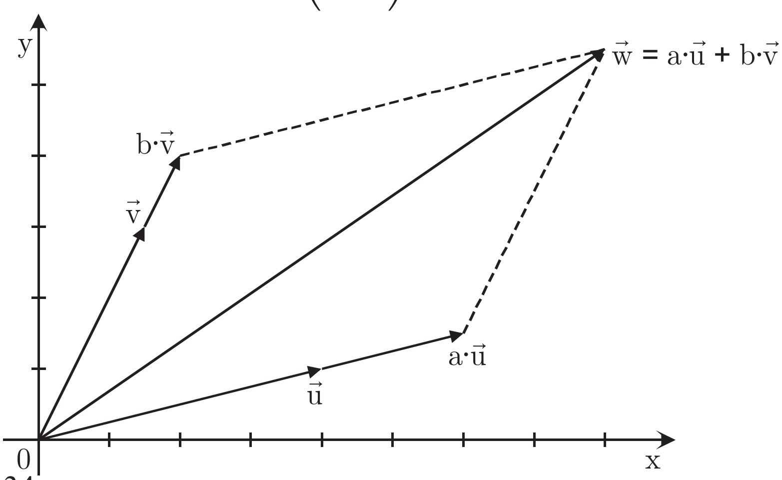
$$\vec{w} = a\,\vec{u} + b\,\vec{v};\ \text{a,b beliebig reell,}$$

heisst **Linearkombination** der Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$.

Beispiel I.33

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 1.5 \\ 3 \end{pmatrix}; \quad a = \frac{3}{2}, \quad b = \frac{4}{3}$$

$$\vec{w} = \frac{3}{2}\vec{u} + \frac{4}{3}\vec{v} = \begin{pmatrix} 8 \\ 5.5 \end{pmatrix}$$



Beispiel I.34

Man stelle $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ *als Linearkombination der Vektoren* $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ *und* $\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ *dar.*

Ansatz:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{rl} 2 = & a + 5b \\ -(4 = & a + 3b) \\ \hline -2 = & 2b \end{array}$$

$$b = -1 \qquad\qquad a = 7$$

Lösung:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = 7\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Beispiel I.35

Für einen Investor kommen als Anlagemöglichkeiten Festgeld resp. ein Aktienfonds in Frage. Dabei gilt folgendes Auszahlungsschema:

Wert in einem Jahr:

	1000 Fr. Festgeld	*1000 Fr. in Aktienfonds*
schlechtes Börsenjahr	*1050 Fr.*	*525 Fr.*
gutes Börsenjahr	*1050 Fr.*	*2100 Fr.*

$$\downarrow \qquad\qquad\qquad \downarrow$$

$$\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 1050 \\ 1050 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 525 \\ 2100 \end{pmatrix}$$

Unter diesen Annahmen gilt beispielsweise:

Heutige Anlageentscheidung	*Auszahlungsschema in einem Jahr*
i) 10'000 Fr. in Aktienfonds	$10\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 5250 \\ 21000 \end{pmatrix}$
ii) 6'000 Fr. in Aktienfonds, 4'000 Fr. in Festgeld	$4\overrightarrow{u} + 6\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 7350 \\ 16800 \end{pmatrix}$
*iii) 20'000 Fr. in Aktienfonds, 10'000 Fr. Kreditaufnahme *)*	$-10\overrightarrow{u} + 20\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 31500 \end{pmatrix}$

**) Wobei für Festgeld und Kredite die gleiche Verzinsung vorausgesetzt wird.*

Verallgemeinerung:

Definition:

Es seien $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k$ Vektoren mit gleich vielen Komponenten

und $a_1, a_2, \ldots, a_k$ beliebige reelle Zahlen
Dann heisst $\mathbf{z} = a_1\mathbf{u}_1 + a_2\mathbf{u}_2 + \cdots + a_k\mathbf{u}_k$ **Linearkombination** der Vektoren

$\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k$.

Beispiel I.36

Man stelle $\boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ *als Linearkombination von* $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ *und* $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ *dar.*

Ansatz:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = a \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

In Komponentenschreibweise:

$$\begin{aligned} 1 &= 2a + 5b \\ 0 &= a + 3b \\ 2 &= 2a + 4b \end{aligned}$$

Lösung:

$$b = -1,\ a = 3$$

Beispiel I.37

Dagegen lässt sich $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ ***nicht*** *als Linearkombination*

der obigen Vektoren **x** *und* **y** *darstellen.*

Nachweis:

Ansatz:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = a \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{aligned} &(i) & 2 &= 2a + 5b \\ &(ii) & 1 &= a + 3b \quad | \cdot(-2) \\ &(iii) & 5 &= 2a + 4b \end{aligned}$$

Lösung der Gleichung (i) und (ii) ist a = 1, b = 0.

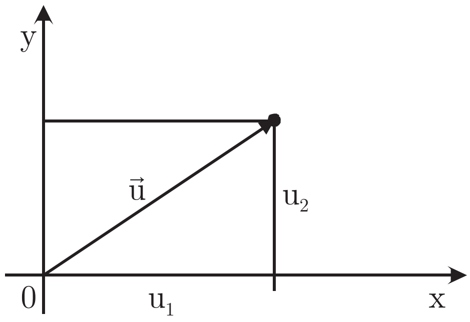
Setzt man diese Werte in (iii) ein, so ergibt sich

$$5 = 2 \qquad \textit{Widerspruch!}$$

d. **Länge eines Vektors**

$\|\overrightarrow{u}\|$ bezeichnet die Länge (oder den "Betrag") des Vektors $\overrightarrow{u}$.

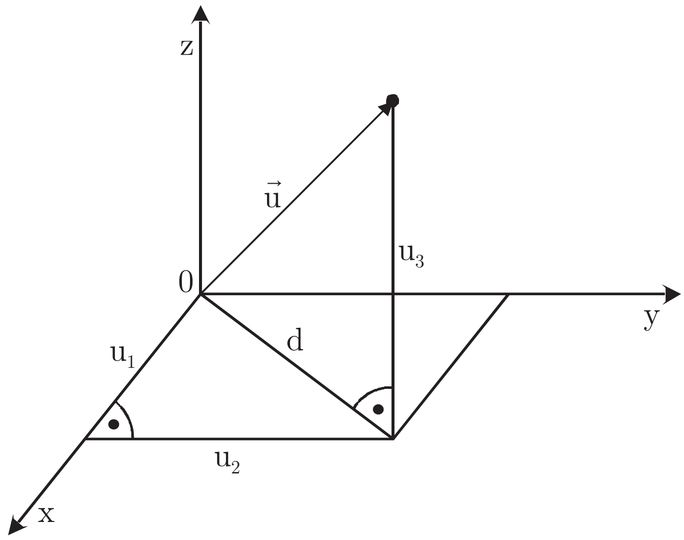
d1. $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$



Nach Satz von Pythagoras ist

$\|\overrightarrow{u}\|^2 = u_1^2 + u_2^2$ d.h. $\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$

d2. $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$



$d^2 = u_1^2 + u_2^2$

$\|\overrightarrow{u}\|^2 = d^2 + u_3^2 = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2$, d.h. $\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$

In Analogie dazu kann man jetzt auch für Vektoren

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ . \\ . \\ u_n \end{pmatrix}$$

mit beliebig vielen Komponenten den Betrag definieren:

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2}$$

Man beachte: $\|\mathbf{u}\|^2 = \mathbf{u}^T\mathbf{u} = \mathbf{u} \bullet \mathbf{u} = \sum_{i=1}^{n} u_i^2$

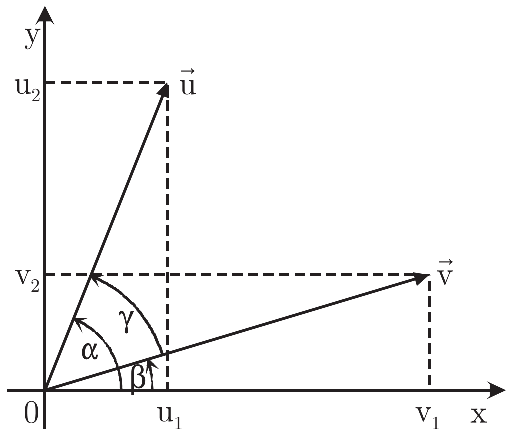
Beispiel I.38

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \|\mathbf{u}\| = \sqrt{1+4+16+1} = \sqrt{22} = 4.69$$

e. **Skalarprodukt zweier Vektoren**

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

Das Skalarprodukt $\vec{u} \bullet \vec{v} = \mathbf{u}^T\mathbf{v}$ kann geometrisch gedeutet werden:

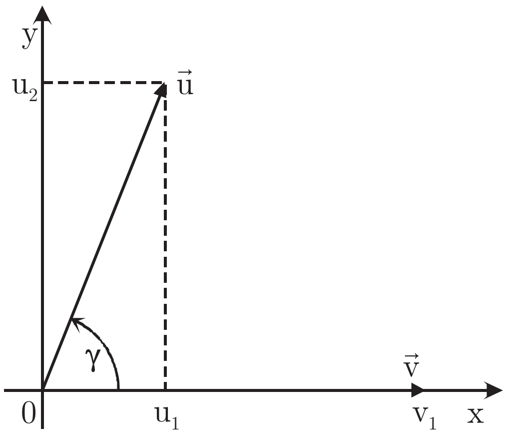


$\boxed{\vec{u} \bullet \vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \cos\gamma}$,

wobei $\gamma = \alpha - \beta$ der Zwischenwinkel der beiden Vektoren ist.

Folgerung: $\cos\gamma = \dfrac{\vec{u} \bullet \vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}$

Nachweis im Spezialfall $\boldsymbol{\beta = 0}$ $(v_1 > 0,\ v_2 = 0)$



Hier gilt:

$$\|\vec{v}\| = v_1$$

$$\frac{u_1}{\|\vec{u}\|} = \cos\gamma$$

$$\vec{u} \bullet \vec{v} = u_1 v_1 + \underbrace{u_2 v_2}_{=0} = u_1 v_1 = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\| \cos\gamma$$

Beispiel I.39

Welchen Winkel schliessen die Vektoren $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ *und* $\vec{v} = \begin{pmatrix} 12 \\ 5 \end{pmatrix}$ *ein?*

$$\cos\alpha = \frac{\vec{u} \bullet \vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|} = \frac{3 \cdot 12 + 4 \cdot 5}{5 \cdot 13} = \frac{56}{65}$$

$$\Rightarrow \alpha = 30.51^\circ$$

f. **Orthogonalität von Vektoren**

$\vec{u} \perp \vec{v}$, d.h. Zwischenwinkel $\gamma = 90°$

$\Leftrightarrow \cos\gamma = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \bullet \vec{v} = 0$

Beispiel I.40

$\vec{u} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ *und* $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ *stehen senkrecht.*

In Analogie definiert man die Orthogonalität auch für Vektoren mit 3 und mehr Komponenten:

$$\mathbf{u}=\begin{pmatrix} u_1 \\ . \\ . \\ u_n \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{v}=\begin{pmatrix} v_1 \\ . \\ . \\ v_n \end{pmatrix}$$

heissen **orthogonal**, falls $\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = 0$.

Beispiel I.41

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ *sind orthogonal, denn* $1 \cdot (-1) + 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 = 0$

Beispiel I.42

Für welchen Wert x sind die Vektoren $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ x \end{pmatrix}$ und $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ *orthogonal?*

Bedingung: $\boldsymbol{u}^{T}\boldsymbol{v} = 1 \cdot 2 + 0 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 + x \cdot (-1) = 0 \quad \Rightarrow x = 4$

Beispiel I.43 (Budgetrestriktion)

Wir betrachten n Güter. Ihre Preise (pro Einheit) seien zusammengefasst im

Preisvektor $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ p_n \end{pmatrix}$*, die konsumierten Mengen im Konsumvektor* $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ c_n \end{pmatrix}$

Das verfügbare Einkommen betrage I.

Die Budgetrestriktion lautet dann:

$$\mathbf{p} \bullet \mathbf{c} = \mathbf{p}^T \mathbf{c} = \sum_{i=1}^{n} p_i c_i = I \qquad (B)$$

Falls $\mathbf{c}$ *und* $\mathbf{c}'$ *zwei Konsumvektoren sind, welche die Budgetrestriktion (B) erfüllen, d.h.*

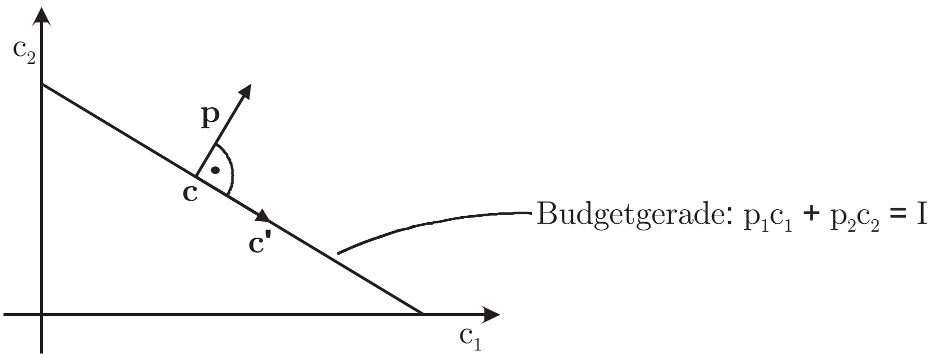
$$\mathbf{p}^T \mathbf{c} = I$$
$$\mathbf{p}^T \mathbf{c}' = I$$

so folgt

$$\mathbf{p}^T (\mathbf{c}' - \mathbf{c}) = 0$$

Im Falle n = 2 :

$\mathbf{c}' - \mathbf{c}$ *ist ein Vektor der Budgetgeraden.*



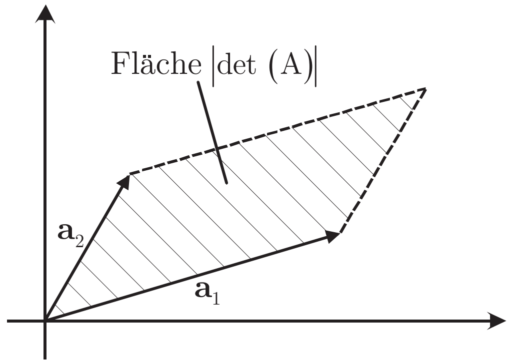
Der Preisvektor $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$ *steht senkrecht auf der Budgetgeraden.*

g. **Geometrische Interpretation der Determinanten einer 2x2-Matrix**

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} \mathrm{a}_{11} & \mathrm{a}_{12} \\ \mathrm{a}_{21} & \mathrm{a}_{22} \end{pmatrix} = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$$

$$|\det(\mathrm{A})| = |\mathrm{a}_{11}\mathrm{a}_{22} - \mathrm{a}_{12}\mathrm{a}_{21}|$$

Der Betrag der Determinanten, $|\det(\mathrm{A})|$, ist gleich der Fläche des von $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ aufgespannten Parallelogramms.

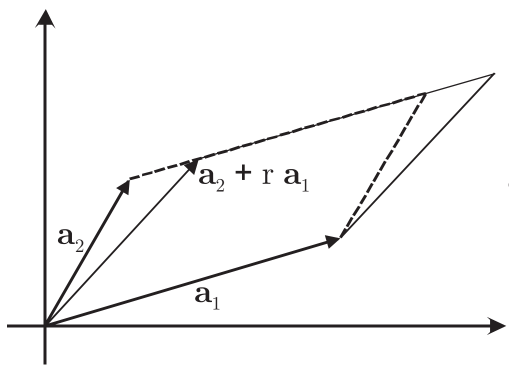


Gemäss dem Satz auf S. 30 gilt

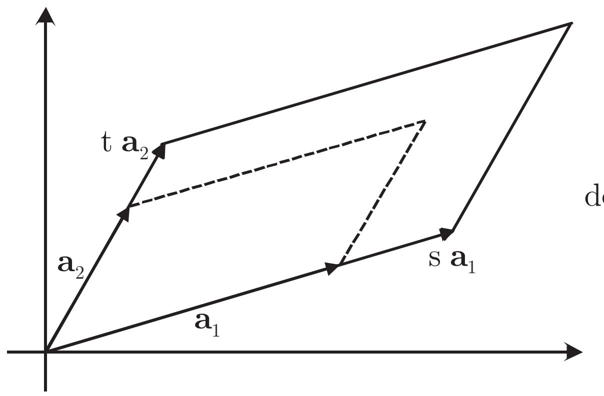
$$\det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) = \det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 + r\mathbf{a}_1)$$

$$\det(s\mathbf{a}_1, t\mathbf{a}_2) = \mathrm{st} \cdot \det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$$

Diese Eigenschaften lassen sich geometrisch sehr leicht veranschaulichen.



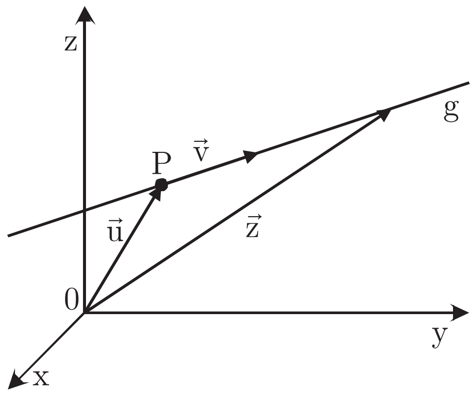
$$\det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) = \det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 + r\mathbf{a}_1)$$



$\det(s\mathbf{a}_1, t\mathbf{a}_2) = st \cdot \det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$

Vektorielle Darstellung einer Geraden oder einer Ebene im Raum

h. **Vektorielle Darstellung (oder: Parameterdarstellung) einer Geraden**



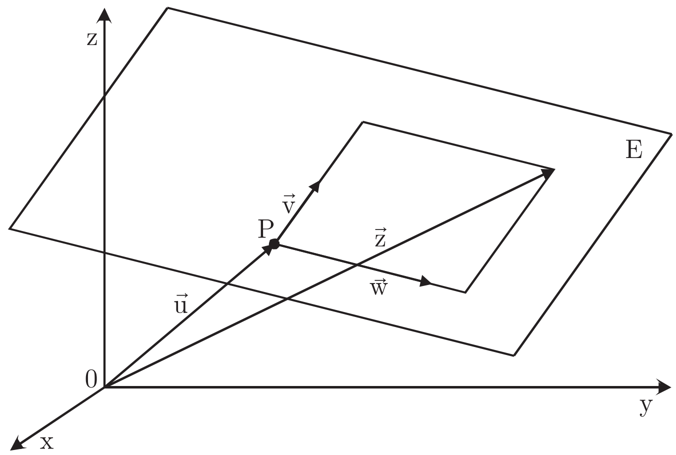
Es sei $\vec{u}$ der Ortsvektor eines festen Punktes P der Geraden g, $\vec{v}$ ein Vektor in Richtung von g. Dann ist

$\vec{z} = \vec{u} + t\,\vec{v}, \qquad t \in \mathbf{R}$

eine Darstellung der Geraden g.

Interpretation: Wenn t alle Werte zwischen $-\infty$ und $+\infty$ durchläuft, beschreibt der Endpunkt des Ortsvektors $\vec{z}$ alle Geradenpunkte.

i. **Vektorielle Darstellung (oder: Parameterdarstellung) einer Ebene im Raum**



E: $\overrightarrow{z} = \overrightarrow{u} + t_1 \overrightarrow{v} + t_2 \overrightarrow{w}$; $\qquad t_1, t_2 \in \mathbb{R}$

$\overrightarrow{v}$ und $\overrightarrow{w}$ seien zwei nicht in einer Geraden liegende Vektoren der Ebene E.

Beispiel I.44

Gesucht ist die vektorielle Darstellung der Geraden durch die Punkte

$$P_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad P_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

$$\overrightarrow{0P_1} \qquad \overrightarrow{v} = \overrightarrow{P_1P_2}$$

Beispiel I.45

Die Ebene durch die Punkte

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad P_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

soll vektoriell dargestellt werden.

Lösung:

$$E: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t_1, t_2 \in \mathbb{R}$$

$$\overrightarrow{0P_3} \qquad \overrightarrow{v} = \overrightarrow{P_3P_1} \qquad \overrightarrow{w} = \overrightarrow{P_3P_2}$$

Bemerkung:

Vektorielle Darstellungen von Geraden und Ebenen sind keineswegs eindeutig!

Beispiel I.46

Eine Ebene sei gegeben durch die Gleichung E: 2x + y + 3z = 6.

Gesucht ist eine vektorielle Darstellung.

Lösung:

Wir verwenden zwei der Variablen als Parameter: z.B.

$$x = t_1, \qquad z = t_2$$

Dann ist

$$y = 6 - 2t_1 - 3t_2$$

$$\begin{pmatrix} \mathrm{x} \\ \mathrm{y} \\ \mathrm{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{t}_1, \mathrm{t}_2 \ \in \mathbb{R}$$

Übungsbeispiele zur Vektorgeometrie

1. **Definition**:

   $\overrightarrow{\mathrm{w}} = \mathrm{a}_1 \overrightarrow{\mathrm{u}}_1 + \mathrm{a}_2 \overrightarrow{\mathrm{u}}_2 + \cdots + \mathrm{a}_k \overrightarrow{\mathrm{u}}_k$ heisst **konvexe Linearkombination** der Vektoren

   $\overrightarrow{\mathrm{u}}_1, \overrightarrow{\mathrm{u}}_2, \ldots, \overrightarrow{\mathrm{u}}_k$, falls $\mathrm{a}_1 \geq 0$, $\mathrm{a}_2 \geq 0, \ldots, \mathrm{a}_k \geq 0$ und $\mathrm{a}_1 + \mathrm{a}_2 + \cdots + \mathrm{a}_k = \sum\limits_{i=1}^{k} \mathrm{a}_i = 1$

Beispiel I.47

$$\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{w} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

$$a_1 = \frac{1}{3} \qquad a_2 = \frac{2}{3}$$

Beispiel I.48

Man zeige: Jeder konvexen Linearkombination zweier Vektoren entspricht ein Punkt auf der Verbindungsstrecke ihrer Endpunkte.

Lösung:

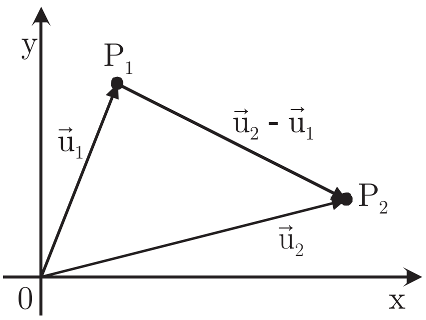
Gegeben: $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$; $a_1 + a_2 = 1$, *d.h.* $a_1 = 1 - a_2$

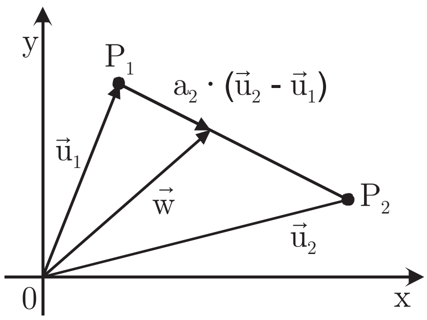
$\vec{w} = a_1 \vec{u}_1 + a_2 \vec{u}_2 = (1 - a_2)\vec{u}_1 + a_2 \vec{u}_2 = \vec{u}_1 + a_2(\vec{u}_2 - \vec{u}_1)$

$\vec{u}_1$ *: Ortsvektor von* P_1

$\vec{u}_2 - \vec{u}_1$ *: Vektor in Richtung* P_1P_2 *;*

$0 \leq a_2 \leq 1$





Folgerung: $\vec{u}_1 + a_2(\vec{u}_2 - \vec{u}_1)$ *ist der Ortsvektor eines Punktes P der Strecke* P_1P_2*.*

Beispiel I.49

Gegeben: Die allgemeine Gleichung einer Ebene im Raum.

E: $Ax + By + Cz = D$; $\mathrm{A, B, C, D} \in \mathbb{R}$

Man zeige: $\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} \perp E$

Lösung:

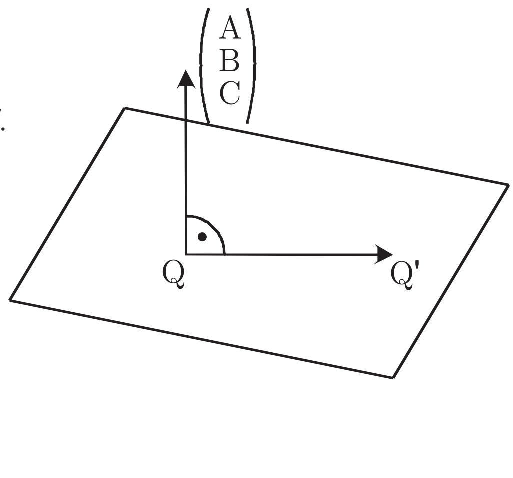
Es seien $Q = \begin{pmatrix} \mathrm{x} \\ \mathrm{y} \\ \mathrm{z} \end{pmatrix}$ *und* $Q' = \begin{pmatrix} \mathrm{x}' \\ \mathrm{y}' \\ \mathrm{z}' \end{pmatrix}$ *beliebige Punkte der Ebene,*

d.h.

$$\begin{array}{llll} Ax & + By & + Cz & = D \\ Ax' & + By' & + Cz' & = D \\ \hline A(x' - x) & +B(y' - y) & + C(z' - z) & = 0 \end{array}$$

$\overrightarrow{QQ'} = \begin{pmatrix} x' - x \\ y' - y \\ z' - z \end{pmatrix}$ *ist ein Vektor der Ebene E.*

Folgerung: $\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$ *senkrecht auf Ebene E.*



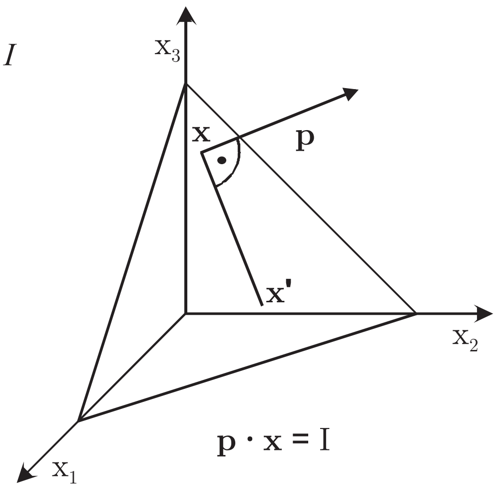
Anwendung:

Der Preisvektor $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} \neq \mathbf{0}$ steht senkrecht auf der

Budgetebene: $\mathbf{p} \bullet \mathbf{x} = I$, d.h. $p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 - I = 0$

Nachweis:

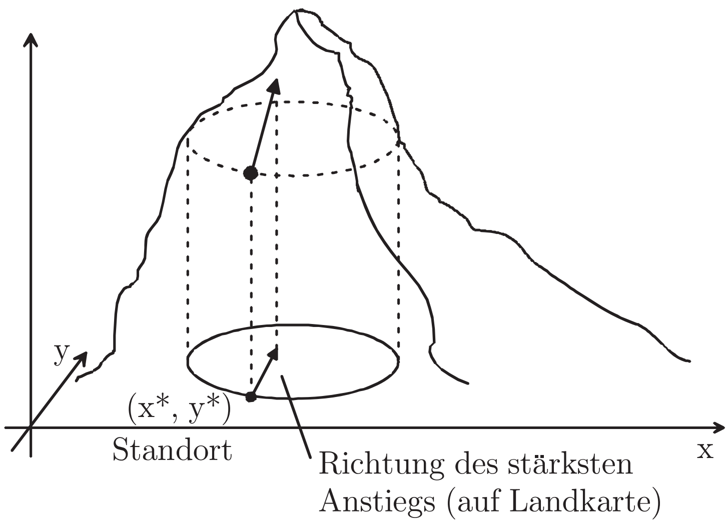
Setze $\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = p \quad , D = I$



7 ANWENDUNG DER VEKTORRECHNUNG IN DER ANALYSIS: DER GRADIENT

7.1 Problemstellung

In Band I wurden Funktionen zweier Variablen $f(x_1, x_2)$ untersucht. Beispielsweise kann $f(x_1, x_2)$ den Nutzen eines Konsumenten aus dem Konsumplan (x_1, x_2) darstellen. Bei Produktions- oder Gewinnfunktionen entspricht (x_1, x_2) einem Produktionsplan.
Von ökonomischem Interesse ist die Frage, welche Veränderung von (x_1, x_2) zur maximalen Nutzen-, Output-, resp. Gewinnzunahme führt.
Als Illustration möge auch das Problem eines ambitiösen Bergsteigers dienen, welcher auf der Landkarte die Richtung des stärksten Anstiegs sucht, um einen Berg zu erklimmen.



Anstelle der Höhenlinien einer Landkarte sind natürlich für den Ökonomen Indifferenzkurven, Isoquanten, Isogewinnlinien etc. von Interesse.
In diesem Abschnitt definieren wir zunächst den Gradienten und weisen dann nach, dass er stets in Richtung des stärksten Anstiegs zeigt.

7.2 Definition des Gradienten

Wir bezeichnen mit $f_{x_1}(\mathbf{x})$,$f_{x_2}(\mathbf{x})$ die partiellen Ableitungen von $f(x_1, x_2)$ an der Stelle

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Siehe Band I, S. 104.

Definition:

Der Vektor $\mathbf{grad}\ f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} f_{x_1}(\mathbf{x}) \\ f_{x_2}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}$ wird als **Gradient** der Funktion $f(x_1,x_2)$ bezeichnet.

Beispiel I.50

Für die Funktion

$$f(x_1, x_2) = 10 - 0.2x_1^2 - 0.2x_2^2$$

erhält man

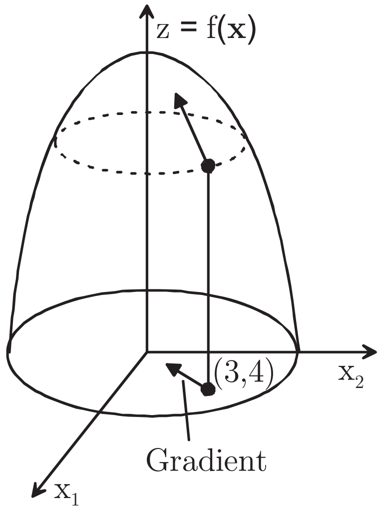
$$f_{x_1}(\boldsymbol{x}) = -0.4x_1$$
$$f_{x_2}(\boldsymbol{x}) = -\ 0.4x_2$$

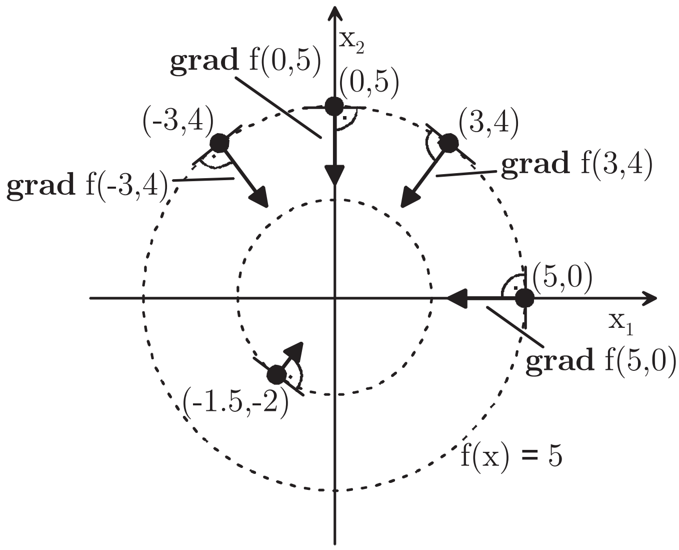
und somit

$$\mathbf{grad}\ f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} -0.4x_1 \\ -0.4x_2 \end{pmatrix}$$

spezielle Werte:

$\mathbf{x}$	$\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1.5 \\ -2 \end{pmatrix}$
$\mathbf{grad}\ f(\mathbf{x})$	$\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1.2 \\ -1.6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1.2 \\ -1.6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.6 \\ 0.8 \end{pmatrix}$





Für Beispiel I.50 gilt:

a. Der Gradient steht senkrecht zur Tangente an die Niveaulinie

b. Der Gradient stellt die Richtung der stärksten Funktionszunahme dar.

Wir werden sehen, dass diese Eigenschaften allgemein gelten.

I. **Gradient und totales Differential**

Das totale Differential in einem Punkt $\widehat{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \widehat{x}_1 \\ \widehat{x}_2 \end{pmatrix}$ ist durch

$$\mathrm{df} = \mathrm{f}_{x_1}(\widehat{\mathbf{x}})\mathrm{dx}_1 + \mathrm{f}_{x_2}(\widehat{\mathbf{x}})\mathrm{dx}_2 \quad \text{, wobei } \mathrm{dx}_1 = \mathrm{x}_1 - \widehat{\mathrm{x}}_1 \quad , \mathrm{dx}_2 = \mathrm{x}_2 - \widehat{\mathrm{x}}_2$$

gegeben. (Vgl. Band I, S. 111 f.).

Der Begriff des Gradienten erlaubt die folgende Darstellung:

$$\mathrm{df} = \mathrm{d}\mathbf{x} \bullet \mathbf{grad}\ \mathrm{f}(\widehat{\mathbf{x}}) = \mathrm{d}\mathbf{x}^T \mathbf{grad}\ \mathrm{f}(\widehat{\mathbf{x}}), \text{ wobei } \mathrm{d}\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathrm{dx}_1 \\ \mathrm{dx}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{x}_1 - \widehat{\mathrm{x}}_1 \\ \mathrm{x}_2 - \widehat{\mathrm{x}}_2 \end{pmatrix}$$

II. **Eigenschaften des Gradienten**

a. **Tangente an Niveaulinie in $\hat{\mathbf{x}}$** (z.B. Isoquante, Indifferenzkurve)

Gemäss Band I, S. 118 gilt für die Tangente an die Niveaulinie

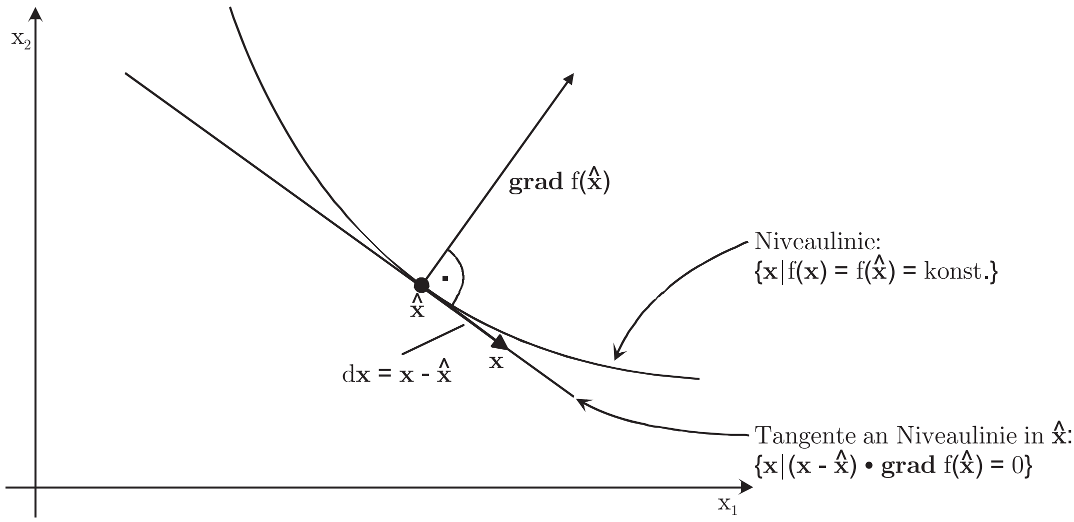
$$df = 0.$$

Wegen

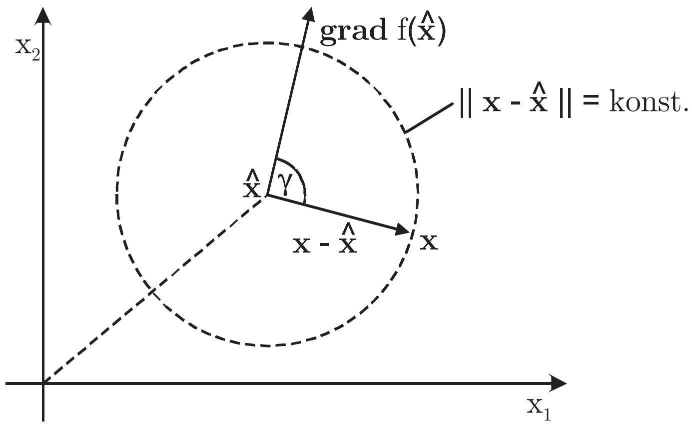
$$df = d\mathbf{x} \bullet \mathbf{grad}\, f(\hat{\mathbf{x}}), \text{ wobei } d\mathbf{x} = \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}$$

gilt somit für die Tangente an die Niveaulinie

$$(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}) \bullet \mathbf{grad}\, f(\hat{\mathbf{x}}) = 0.$$



b. **Stärkste Zunahme resp. stärkster Abstieg einer Funktion**



Für beliebige **x** gilt

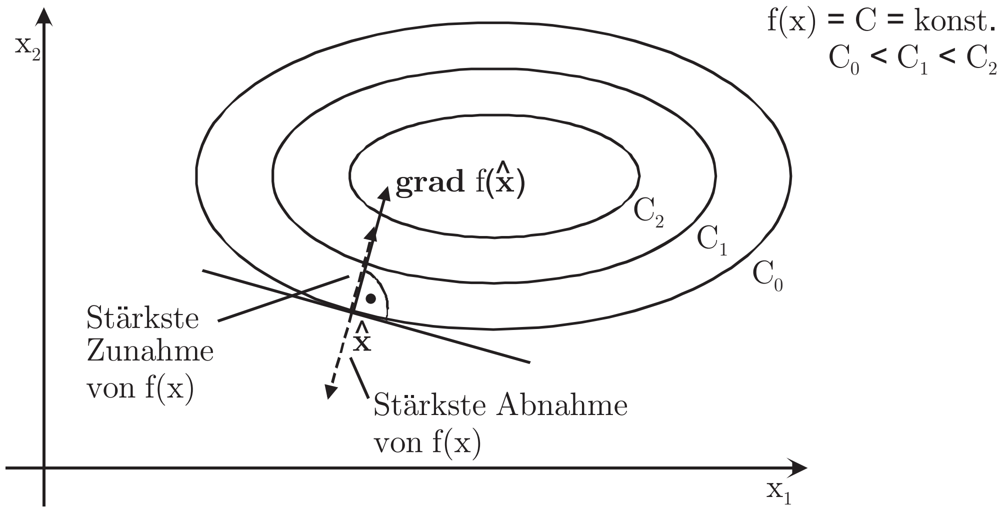
$$df = (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}) \bullet \mathbf{grad}\, f(\hat{\mathbf{x}}) = \|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\| \cdot \|\mathbf{grad}\, f(\hat{\mathbf{x}})\| \cdot \cos\gamma$$

Nun setzt man df in Bezug zur Länge des Vektors **x - x̂** und erhält

$$\frac{\mathrm{df}}{\|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\|} = \|\mathbf{grad}\ \mathrm{f}(\widehat{\mathbf{x}})\| \cdot \cos\gamma$$

Dieser Ausdruck ist

maximal	für $\gamma = 0$, d.h. $\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}} = \lambda\ \mathbf{grad}\ \mathrm{f}(\widehat{\mathbf{x}}),\ \lambda > 0$	**stärkste Zunahme**
minimal	für $\gamma = \pi$, d.h. $\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}} = \mu\ \mathbf{grad}\ \mathrm{f}(\widehat{\mathbf{x}}),\ \mu < 0$	**stärkster Abstieg**
0	für $\gamma = \pm\frac{\pi}{2}$ bzw. $(\pm 90°)$	**Tangente an Niveaulinie**



III. **Notwendige Bedingung für lokales Extremum**

a. **Optimierungsproblem ohne Nebenbedingung**

Die notwendige Bedingung für ein lokales Maximum oder Minimum der Funktion

$\mathrm{f}(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2)$

in $\quad \hat{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \hat{\mathrm{x}}_1 \\ \hat{\mathrm{x}}_2 \end{pmatrix}$ lautet (vgl. Band I, S. 129)

$$\mathrm{f}_{x_1}(\hat{\mathbf{x}}) = 0, \quad \mathrm{f}_{x_2}(\hat{\mathbf{x}}) = 0$$

D.h.

$$\boxed{\mathbf{grad}\ \mathrm{f}(\hat{\mathbf{x}}) = \mathbf{0}}$$

b. **Optimierungsproblem mit Nebenbedingung**

Die notwendige Bedingung für ein lokales Extremum des Optimierungsproblems:

Maximiere

$$f(x_1, x_2)$$

unter der Nebenbedingung

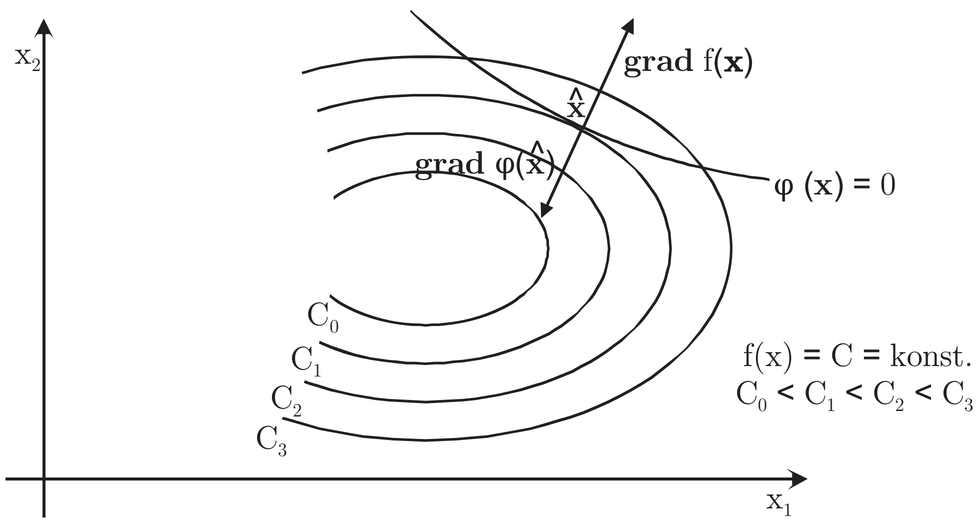
$$\varphi(x_1, x_2) = 0$$

in $\hat{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{pmatrix}$ lautet (vgl. Band I, S. 138, 139):

$$\begin{aligned} f_{x_1}(\hat{\mathbf{x}}) \quad + \lambda\varphi_{x_1}(\hat{\mathbf{x}}) &= 0 \\ f_{x_2}(\hat{\mathbf{x}}) \quad + \lambda\varphi_{x_2}(\hat{\mathbf{x}}) &= 0 \\ \varphi(\hat{\mathbf{x}}) &= 0 \end{aligned}$$

D.h.

$$\boxed{\begin{aligned} \textbf{grad}\, f(\hat{\mathbf{x}}) \quad + \lambda\, \textbf{grad}\, \varphi(\hat{\mathbf{x}}) &= \mathbf{0} \\ \varphi(\hat{\mathbf{x}}) &= 0 \end{aligned}}$$



Beispiel I.51 (Nutzenmaximierung)

Maximiere die Nutzenfunktion

$u\,(x_1, x_2)$

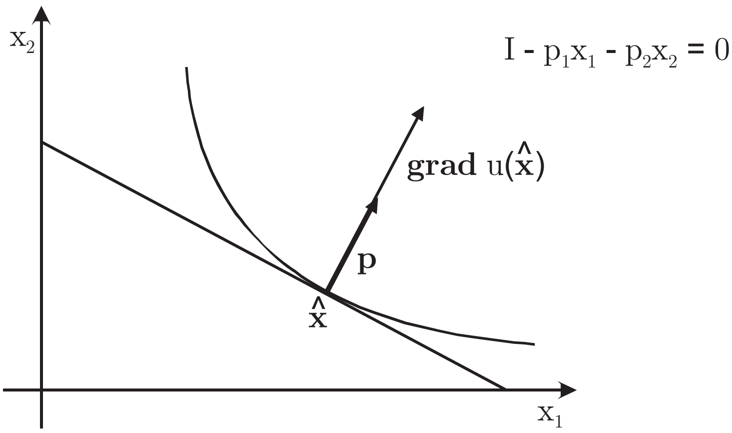
unter der Budgetrestriktion

$I - p_1x_1 - p_2x_2 = 0$

Notwendig ist die Bedingung:

$$\mathbf{grad}\; u(\hat{\mathbf{x}}) - \lambda\mathbf{p} = \mathbf{0}, \text{ wobei } \mathbf{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$$

$$I - p_1\hat{x}_1 - p_2\hat{x}_2 = 0$$



Interpretation:

Der Gradient der Nutzenfunktion ***grad*** *u(*$\hat{\mathbf{x}}$*) ist proportional zum Preisvektor* ***p****.*

Bemerkung:

Für Funktionen von n Variablen $f(x_1, \ldots, x_n)$ ist der Gradient durch

$$\mathbf{grad}\; f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} f_{x_1}(\mathbf{x}) \\ f_{x_2}(\mathbf{x}) \\ . \\ f_{x_n}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}$$ definiert und die Aussagen für den Fall n = 2 lassen sich

entsprechend verallgemeinern.

II. LINEARE GLEICHUNGSSYSTEME

Als Vorbereitung für die Theorie der Gleichungssysteme führen wir zunächst die zentralen Begriffe **"Lineare Abhängigkeit / Unabhängigkeit von Vektoren"** und **"Rang einer Matrix"** ein.

1 LINEARE UNABHÄNGIGKEIT VON VEKTOREN, VEKTORRAUM, BASIS

1.1 Lineare Unabhängigkeit von Vektoren

Beispiel II.1

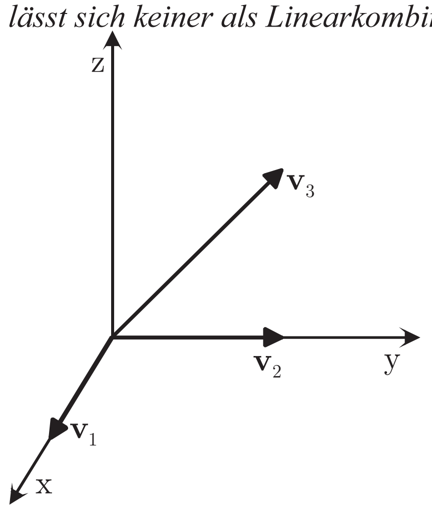
Gegeben sind die Vektoren

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a) Von den Vektoren

$$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$$

lässt sich keiner als Linearkombination der anderen beiden darstellen



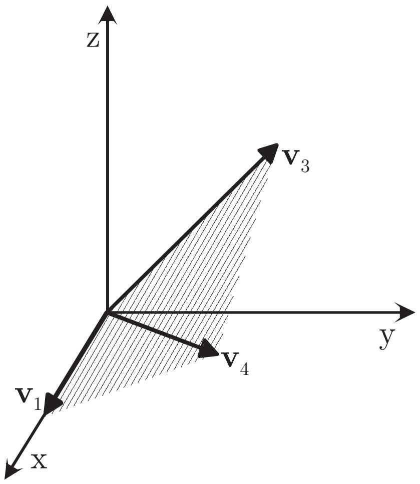
b) Bei den Vektoren

$$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$$

gilt hingegen

$$\mathbf{v}_4 = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3$$

Wie aus der Skizze hervorgeht, liegen $\boldsymbol{v}_1$*,* $\boldsymbol{v}_3$*,* $\boldsymbol{v}_4$ *in einer Ebene.*



Beispiel II.1 motiviert die folgende allgemeine Definition:

Definition 1.1:

a. k Vektoren $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, ..., $\mathbf{u}_k$ heissen **linear abhängig**, falls einer sich als Linearkombination der anderen darstellen lässt, d.h. falls für einen Index i gilt:

$$\mathbf{u}_i = a_1\mathbf{u}_1 + a_2\mathbf{u}_2 + \ldots + a_{i-1}\mathbf{u}_{i-1} + a_{i+1}\mathbf{u}_{i+1} + \ldots + a_k\mathbf{u}_k$$

b. Andernfalls heissen die Vektoren **linear unabhängig**.

Bemerkung

In Beispiel II.1 sind $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ **linear unabhängig**, während bei $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_3$, $\mathbf{v}_4$ **lineare Abhängigkeit** vorliegt.

Beispiel II.2

Die Vektoren

$$\boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} \quad ,\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad ,\mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

sind ***linear abhängig****, denn es gilt* $\boldsymbol{u}_3 = 2\boldsymbol{u}_2$.

Hinweis

In Beispiel II.2 lässt sich $\mathbf{u}_1$ **nicht** als Linearkombination von $\mathbf{u}_2$ und $\mathbf{u}_3$ darstellen. Gemäss Definition 1.1 können wir erst auf lineare Unabhängigkeit schliessen, falls sich **kein** Vektor als Linearkombination der anderen darstellen lässt. Weil diese Abklärung sehr umständlich sein kann, verwendet man häufig die **äquivalente** Definition

Definition 1.2:

a. k Vektoren $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k$ heissen **linear abhängig**, falls

$$b_1\mathbf{u}_1 + b_2\mathbf{u}_2 + \ldots + b_k\mathbf{u}_k = \mathbf{0}, \text{ aber nicht alle } b_j = 0.$$

b. $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k$ heissen **linear unabhängig**, falls aus

$$b_1\mathbf{u}_1 + b_2\mathbf{u}_2 + \ldots + b_k\mathbf{u}_k = \mathbf{0} \text{ folgt:}$$

$$b_1 = b_2 = \ldots = b_k = 0.$$

Beispiel II.3

$$\boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \boldsymbol{u}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Man sieht sofort, dass $\boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{u}_1 + \mathbf{u}_2$ *gilt. Wegen Definition 1.1 sind* $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{u}_3$ ***linear abhängig.***

Beispiel II.4

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Hier ist die Abklärung mit Hilfe von Definition 1.2 zweckmässig

$$\mathrm{a}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathrm{b}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathrm{c}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

führt zu

$$\left.\begin{aligned} a + b &= 0 \\ b + c &= 0 \\ c &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \mathrm{c} = 0,\ \mathrm{b} = 0,\ \mathrm{a} = 0$$

somit sind die Vektoren linear unabhängig.

Beispiel II.5

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Offensichtlich gilt

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Gemäss Definition 1.1 sind somit $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$ *linear abhängig.*

Beachte: Enthält ein Vektorsystem den Vektor **0**, so ist es linear abhängig.

Beispiel II.6

Der zukünftige Wert der Aktien I, II und III lasse sich durch folgendes Tableau darstellen:

Wert in einem Jahr:	*Aktie I*	*Aktie II*	*Aktie III*
schlechtes Börsenjahr	*3'000 Fr.*	*1'000 Fr.*	*0 Fr.*
gutes Börsenjahr	*7'000 Fr.*	*3'000 Fr.*	*1'000 Fr.*
	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
	$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 3000 \\ 7000 \end{pmatrix}$	$\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 1000 \\ 3000 \end{pmatrix}$	$\mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1000 \end{pmatrix}$

Was lässt sich über die heutigen Preise p_1, p_2 und p_3 dieser Aktien aussagen, wenn der Markt keine "Arbitrage"-Profite [1] *zulässt?*

***Lösung**:*

$\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{u}_3$ sind linear abhängig, denn es gilt

$$\boldsymbol{u}_1 + 2\boldsymbol{u}_3 = 3\boldsymbol{u}_2$$

Interpretation:

Folgende Strategien führen zum selben Auszahlungsschema:

(1) Kauf von 1 Aktie I, Kauf von 2 Aktien III

(2) Kauf von 3 Aktien II

In einem Markt ohne "Arbitrage"-Profite muss deshalb für die heutigen Preise gelten:

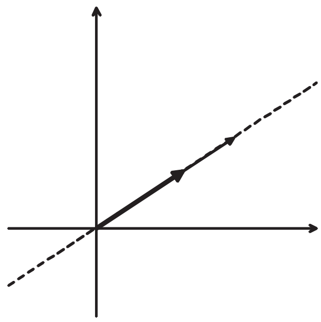
$$p_1 + 2p_3 = 3p_2$$

[1] "Arbitrage"-Freiheit bedeutet, dass keine Strategien existieren, welche zukünftige Profite erlauben, ohne den heutigen Einsatz von Mitteln zu erfordern.

Geometrische Interpretation von linearer Abhängigkeit und Unabhängigkeit in der Ebene $\mathbb{R}^2$ und im Raum $\mathbb{R}^3$:

Im 2-dimensionalen Raum $\mathbb{R}^2$:

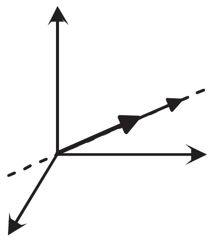
2 Vektoren sind linear abhängig $\Leftrightarrow$
Einer ist ein Vielfaches des anderen $\Leftrightarrow$
Sie liegen auf der gleichen Geraden durch 0.



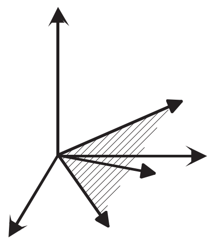
3 oder mehr Vektoren $\in \mathbb{R}^2$ sind **stets linear abhängig**.

Im 3-dimensionalen Raum $\mathbb{R}^3$:

2 Vektoren sind linear abhängig $\Leftrightarrow$ sie liegen auf der gleichen Geraden durch 0.



3 Vektoren sind linear abhängig $\Leftrightarrow$ sie liegen in derselben Ebene durch 0.



4 oder mehr Vektoren $\in \mathbb{R}^3$ sind **stets linear abhängig**.

1.2 Vektorraum, Basis im $\mathbb{R}^3$ resp. $\mathbb{R}^n$

Definition 1.3:

Gegeben seien **n linear unabhängige** Vektoren $\mathbf{u}_1,\ \mathbf{u}_2,\ \ldots,\ \mathbf{u}_n$.

Die Menge aller möglichen Linearkombinationen von $\mathbf{u}_1,\ \mathbf{u}_2,\ \ldots,\ \mathbf{u}_n$ wird **n-dimensionaler Vektorraum V** genannt.

$\mathbf{u}_1,\ \mathbf{u}_2,\ \ldots,\ \mathbf{u}_n$ wird als eine **Basis** des Vektorraums V bezeichnet.

Bemerkungen

1. Weil jedes Element eines Vektorraumes V sich als Linearkombination von $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$ darstellen lässt, sagt man:

   $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$ spannen den Vektorraum V auf.

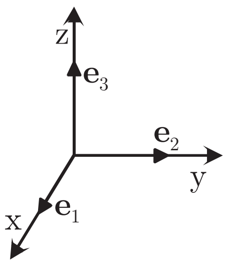
2. Eine Basis spannt mit möglichst wenig Vektoren (deshalb die lineare Unabhängigkeit von $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$) einen Vektorraum V auf.

Beispiel II.7

Die Vektoren $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

stellen eine Basis des Vektorraumes $\mathbb{R}^3$ *dar.*

$$\mathbb{R}^3 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \; x, \; y, \; z \; \in \mathbb{R} \right\}$$



Nachweis:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Jeder Vektor von $\mathbb{R}^3$ *ist eine Linearkombination obiger drei Vektoren.*

Beispiel II.8

Ein Vektorraum kann verschiedene Basen haben.

Auch $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ *spannen* $\mathbb{R}^3$ *auf.*

Nachweis:

i) Die Vektoren sind linear unabhängig.

ii) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (x - y + z) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (y - z) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Beispiel II.9

Gegeben seien die Vektoren

$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Es gilt

a) $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4$ *keine Basis des* $\mathbb{R}^3$

$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4$ *spannen den* $\mathbb{R}^3$ *auf, sind aber linear abhängig.*

b) $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ *keine Basis des* $\mathbb{R}^3$

$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ *sind linear unabhängig, aber sie spannen den* $\mathbb{R}^3$ *nicht auf.*

c) $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ *keine Basis des* $\mathbb{R}^3$

$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ *spannen den* $\mathbb{R}^3$ *nicht auf und sind zudem linear abhängig.*

Beispiel II.10

Eine besonders einfache Basis des Vektorraumes

$$\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} \middle| \, x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R} \right\} \qquad \textit{ist}$$

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ . \\ . \\ 0 \end{pmatrix}, \ \ldots, \ \mathbf{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Diese Basisvektoren sind sogenannte ***Einheitsvektoren*** *(d.h. ihre Länge ist 1). Sie sind ferner paarweise* ***orthogonal****, d.h.*

$$\mathbf{e_i}^T \mathbf{e_j} = \begin{cases} 1, & \text{für } i = j \\ 0, & \text{für } i \neq j \end{cases}$$

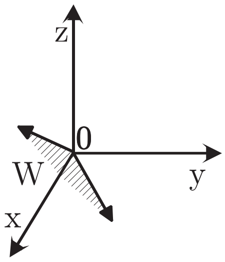
Man spricht von einer "orthonormierten Basis".

Bemerkung: Für n = 3 erhalten wir die Basis in Beispiel II.7.

Beispiel II.11

Die Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ *stellen eine Basis des Vektorraumes*

$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x - y - z = 0 \right\}$ *dar.*



Nachweis:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in W \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_1 + t_2 \\ t_1 \\ t_2 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{t}_1, \mathrm{t}_2 \ \text{beliebig}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Geometrische Interpretation von W:

*Ebene durch **0** (2-dimensionaler Vektorraum)*

Beachte:

1. n + 1 oder mehr Vektoren im n-dimensionalen Raum $\mathbf{R}^n$ sind **stets linear abhängig**.
2. Jede Basis des $\mathbf{R}^n$ besteht aus n Vektoren.
3. n linear unabhängige Vektoren im $\mathbf{R}^n$ bilden eine Basis des $\mathbf{R}^n$.
4. $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$ sei eine Basis des Vektorraums V. Dann ist für jedes $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$ die Darstellung $\mathbf{x} = \mathrm{a}_1\mathbf{u}_1 + \mathrm{a}_2\mathbf{u}_2 + \ldots + \mathrm{a}_n\mathbf{u}_n$ **eindeutig**.

2 RANG EINER MATRIX, EXISTENZ DER INVERSEN EINER QUADRATISCHEN MATRIX

Für jede beliebige Matrix gilt:

Satz 2.1:
Die maximale Anzahl linear unabhängiger Kolonnenvektoren stimmt mit der maximalen Anzahl ihrer linear unabhängigen Zeilenvektoren überein.

Beispiel II.12

$$A = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 6 & 10 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \mathbf{b}_1{}^T \\ \mathbf{b}_2{}^T \\ \mathbf{b}_3{}^T \end{array} \\ \begin{array}{cccc} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 & \mathbf{a}_4 \end{array} & \end{array}$$

i) Die Zeilenvektoren $\boldsymbol{b}_1^{\mathrm{T}}$ *und* $\boldsymbol{b}_2^{\mathrm{T}}$ *sind linear unabhängig;*

$\boldsymbol{b}_3^{\mathrm{T}} = 2\,\boldsymbol{b}_1^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{b}_2^{\mathrm{T}}$

$\Rightarrow$*(maximale) Anzahl linear unabhängiger Zeilenvektoren = 2*

ii) Die Kolonnenvektoren $\boldsymbol{a}_1$ *und* $\boldsymbol{a}_2$ *sind linear unabhängig;*

$\boldsymbol{a}_3 = 2\boldsymbol{a}_1 + 2\boldsymbol{a}_2$

$\boldsymbol{a}_4 = 3\boldsymbol{a}_1 + 4\boldsymbol{a}_2$

$\Rightarrow$*(maximale) Anzahl linear unabhängiger Kolonnenvektoren = 2*

Definition 2.1:

Die maximale Anzahl linear unabhängiger Zeilenvektoren (oder Kolonnenvektoren) einer Matrix A heisst **Rang** der Matrix A.

Schreibweise: rg(A) (oder Rg(A))

Beispiel II.13

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{rg(A)} = 2 \qquad \mathrm{rg(B)} = 1$$

Definition 2.2:

Eine quadratische Matrix $\mathrm{A}_{n\times n}$ mit **rg(A) = r = n** heisst **regulär**,

eine solche mit **rg(A) = r $<$ n** heisst **singulär**.

Beispiel II.14

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ *ist regulär,* $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ *ist singulär.*

Satz 2.2:

Die Inverse A^{-1} einer quadratischen Matrix A existiert dann, und nur dann, wenn A regulär ist.

Beweis für den Fall n = 3:

$$\begin{array}{c} A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \\ \quad\;\; \mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad \mathbf{a}_3 \end{array} \qquad \text{Ansatz für } A^{-1} : A^{-1} = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix}$$

Zu erfüllen ist die Bedingung: $AA^{-1} = I$, oder, kolonnenweise ausgeschrieben:

$$x_1\mathbf{a_1} + x_2\mathbf{a_2} + x_3\mathbf{a_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{e}_1$$

$$y_1\mathbf{a_1} + y_2\mathbf{a_2} + y_3\mathbf{a_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{e}_2$$

$$z_1\mathbf{a_1} + z_2\mathbf{a_2} + z_3\mathbf{a_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{e}_3$$

Wenn A regulär ist, dann sind die Vektoren $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ und $\mathbf{a}_3$ linear unabhängig, bilden also eine Basis für $\mathbb{R}^3$. Es existiert dann eine **eindeutige** Darstellung der Vektoren $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ und $\mathbf{e}_3$ als Linearkombination von $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ und $\mathbf{a}_3$, d.h. x_1, x_2, x_3, y_1, …, z_3 sind eindeutig bestimmt.

Wenn A singulär ist, sind $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ und $\mathbf{a}_3$ linear abhängig, liegen also in **einer** Ebene durch 0. Mindestens einer der Vektoren $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ und $\mathbf{e}_3$ kann dann **nicht** als Linearkombination von $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ und $\mathbf{a}_3$ geschrieben werden.

Test für Regularität/Singularität quadratischer Matrizen

(bzw. für Existenz / Nichtexistenz von A^{-1})

Satz 2.3:

$A_{n\times n}$ regulär	$\Leftrightarrow$	$\det(A) \neq 0$
$A_{n\times n}$ singulär	$\Leftrightarrow$	$\det(A) = 0$

Zusammenstellung:

$A_{n\times n}$ regulär	$A_{n\times n}$ singulär
$\Leftrightarrow$ rg (A) = n	$\Leftrightarrow$ rg (A) $<$ n
$\Leftrightarrow$ A^{-1} existiert	$\Leftrightarrow$ A^{-1} existiert nicht
$\Leftrightarrow$ $\det(A) \neq 0$	$\Leftrightarrow$ $\det(A) = 0$

Es gilt

1. A_{nxn} regulär $\Leftrightarrow$ Kolonnenvektoren (resp. Zeilenvektoren) bilden eine Basis des $\mathbb{R}^n$

2. A_{nxn} singulär $\Leftrightarrow$ Kolonnenvektoren (resp. Zeilenvektoren) sind linear abhängig

3 LINEARE GLEICHUNGSSYSTEME

Die zentrale Frage, die sich beim Lösen von Gleichungssystemen stellt, ist folgende:

Hat ein Gleichungssystem stets eine Lösung?

Ist die Lösung eines Systems eindeutig?

3.1 Einführung

Wir betrachten Systeme von 3 Gleichungen mit 3 Unbekannten:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \qquad (E_1)$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \qquad (E_2)$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \qquad (E_3)$$

Jede der obigen Gleichungen ist die Gleichung einer **Ebene** im dreidimensionalen Raum $\mathbf{R}^3$.

Jeder gemeinsame Punkt der Ebenen stellt eine Lösung des Gleichungssystems dar und umgekehrt.

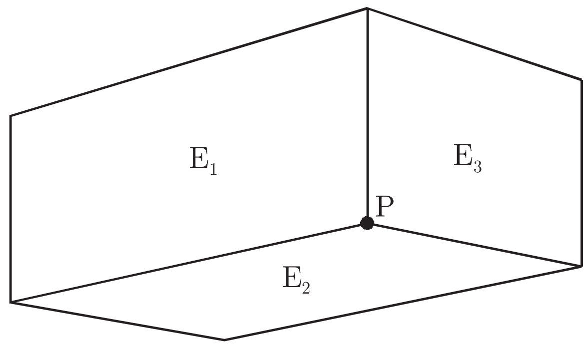
3 Ebenen können

- genau einen Punkt (1. Fall)
- keinen Punkt (2. Fall)
- eine Gerade (3. Fall)

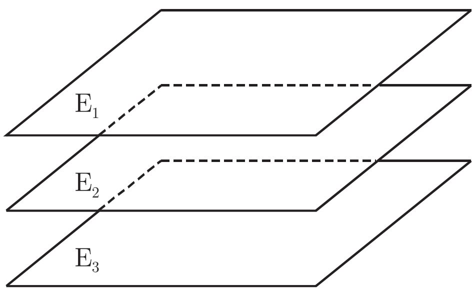
gemeinsam haben, je nach ihrer gegenseitigen Lage.

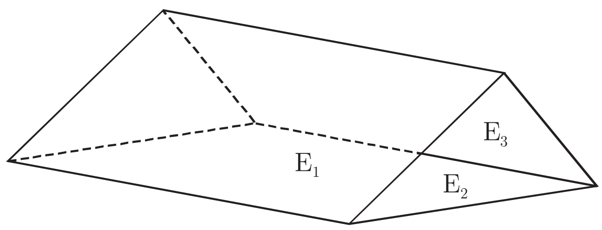
Illustration:

genau ein gemeinsamer Punkt P

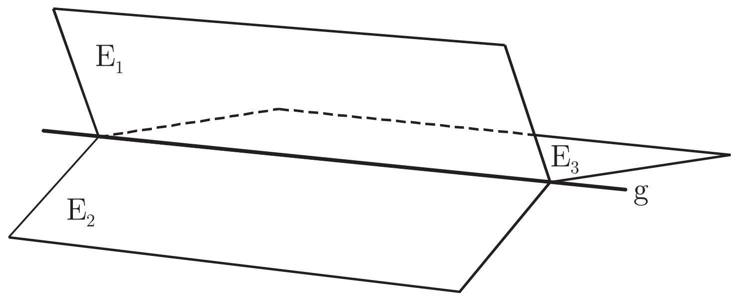


kein gemeinsamer Punkt





gemeinsame Gerade g



Das entsprechende Gleichungssystem hat dann

- genau eine Lösung
- keine Lösung
- ∞ viele Lösungen.

Beispiel II.15 (Produktionsprozesse I)

Eine Firma stellt ein Produkt (Gut 1) mit Hilfe zweier Produktionsfaktoren (Gut 2 und Gut 3) her. Es stehen 3 Produktionsprozesse zur Verfügung, welche mit beliebiger Intensität und simultan (konstante Skalenerträge) eingesetzt werden können.

1. Prozess *2. Prozess* *3. Prozess*

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ -11 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Vorzeichenkonvention: $+$*: Output,* $-$*: Input*

Interpretation:
Im 2. Prozess ermöglichen die Inputmengen 5 von Gut 2 und 11 von Gut 3 eine Outputmenge 3 von Gut 1.

Die Produktionsmöglichkeiten sind dann durch

$$x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + x_3\boldsymbol{a}_3 = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & -5 & -4 \\ -1 & -11 & -5 \end{pmatrix} \\ \mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad \mathbf{a}_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\ \mathbf{x} \end{array} = A\boldsymbol{x}$$

gegeben, wobei $x_1, x_2, x_3 \geq 0$ *die frei zu wählenden Intensitäten für die Produktionsprozesse darstellen.*

***Frage**:*
Ist $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 20 \\ -35 \\ -66 \end{pmatrix}$ *realisierbar?*

Die Produktionsaktivität $\boldsymbol{b}$ *ist realisierbar, falls*

$$x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + x_3\mathbf{a}_3 = \mathbf{b}$$

respektive

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

eine Lösung $\boldsymbol{x}$ *mit* $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 0$ *besitzt.*

Das entsprechende Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + \quad 3x_2 + \quad 2x_3 &= \quad 20 \\ -2x_1 - \quad 5x_2 - \quad 4x_3 &= -35 \\ -x_1 - \quad 11x_2 - \quad 5x_3 &= -66 \end{aligned}$$

besitzt die eindeutige Lösung

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Beispiel II.16 (Produktionsprozesse II)

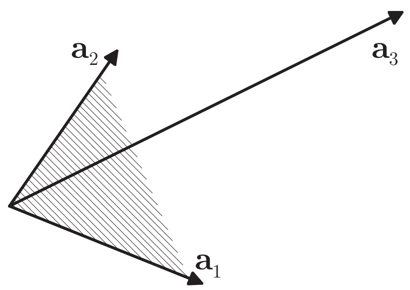
Die Produktionsprozesse seien gegeben durch

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ -7 \end{pmatrix}$$

Wegen

$$\boldsymbol{a}_3 = 2\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2$$

sind $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ *linear abhängig, d.h.* $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ *liegen in einer Ebene.*



Fall 1:

$$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}' = \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ -9 \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{b}'$ ist genau dann realisierbar, falls das Gleichungssystem

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}'$$

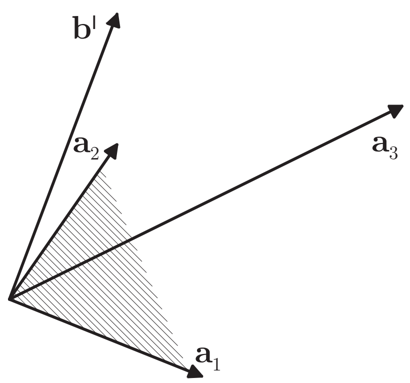
eine Lösung x_1, x_2, $x_3 \geq 0$ besitzt.

$$\begin{array}{lrrrrl} & x_1+ & 2x_2+ & 4x_3 = & 6 & (1) \\ & -x_1- & 3x_2- & 5x_3 = & -6 & (2) \\ & -2x_1- & 3x_2- & 7x_3 = & -9 & (3) \\ \hline & x_1+ & 2x_2+ & 4x_3 = & 6 & (1) \\ (1)+(2) \Rightarrow & - & x_2- & x_3 = & 0 & (2') \\ 2(1)+(3) \Rightarrow & & x_2+ & x_3 = & 3 & (3') \end{array} \quad \Big\} \Rightarrow 0 = 3 \textit{ Widerspruch}$$

Weil das Gleichungssystem keine Lösung besitzt, ist $\boldsymbol{b}'$ nicht realisierbar.

Geometrische Interpretation:

$\boldsymbol{b}'$ liegt nicht in der von $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ aufgespannten Ebene und lässt sich somit nicht als Linearkombination von $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ darstellen.



Fall 2:

$$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}'' = \begin{pmatrix} 7 \\ -10 \\ -11 \end{pmatrix}$$

Das Gleichungssystem

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}''$$

führt zu

$$\begin{array}{rrrrrrl}
 & x_1+ & 2x_2+ & 4x_3 = & 7 & (1) & \\
 & -\,x_1- & 3x_2- & 5x_3 = & -10 & (2) & \\
 & -2x_1- & 3x_2- & 7x_3 = & -11 & (3) & \\
\hline
 & x_1+ & 2x_2+ & 4x_3 = & 7 & (1) & \\
(1)+(2) \Rightarrow & - & x_2- & x_3 = & -3 & (2') & \\
2(1)+(3) \Rightarrow & & x_2+ & x_3 = & 3 & (3') & \\
\hline
(1)+2(2') \Rightarrow & x_1+ & & 2x_3 = & 1 & & \left.\begin{array}{l} \\ \\ \end{array}\right\} \begin{array}{l} \textit{2 Gleichungen für} \\ \textit{3 Unbekannte} \end{array} \\
-(2') & & x_2+ & x_3 = & 3 & & \\
\hline
\end{array}$$

Setzt man

$$x_3 = t$$

so folgt

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 - 2t \\ x_2 &= 3 - t \end{aligned}$$

Die Lösung des Gleichungssystems lautet

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2t \\ 3-t \\ t \end{pmatrix}, \mathrm{t} \in \mathbb{R}$$

Damit $x_1, x_2, x_3 \geq 0$ *gilt, ist die Einschränkung*

$$0 \leq t \leq 0.5$$

erforderlich.

***Geometrische Interpretation**:*

$\boldsymbol{b}''$ liegt in der von $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ aufgespannten Ebene. Wegen der linearen Abhängigkeit von $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ bestehen unendlich viele Möglichkeiten $\boldsymbol{b}''$ als Linearkombination von $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ darzustellen.

3.2 Lösbarkeit linearer Gleichungssysteme

Im Folgenden untersuchen wir allgemein, unter welchen Bedingungen ein vorgegebenes lineares Gleichungssystem (m Gleichungen mit n Unbekannten) **genau eine**, **keine**, oder **unendlich viele Lösungen** hat. Das Gleichungssystem

$$
\begin{gathered}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\[2ex]
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\
. \\
. \\
. \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m
\end{gathered}
$$

kann unter Verwendung folgender Abkürzungen

$$
A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ . & & \\ . & & \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ . \\ . \\ b_m \end{pmatrix}
$$

matriziell geschrieben werden wie folgt:

$$\boxed{A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}}$$

In vektorieller Darstellung

$$x_1\mathbf{a}_1 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n = \mathbf{b} \quad \text{,wobei } A = (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)$$

Bemerkung

In Analogie zu den Beispielen 1, 2 geht es bei jedem linearen Gleichungssystem

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

darum, die rechte Seite **b** als Linearkombination der Kolonnenvektoren $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$,..., $\mathbf{a}_n$ darzustellen.

Zur Diskussion der Lösbarkeit des linearen Gleichungssystems $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ führen wir folgende Begriffe ein:

Definition:

$A = (\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n)$ heisst **Koeffizientenmatrix**

$(A, \mathbf{b}) = (\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n, \mathbf{b})$ heisst **erweiterte Koeffizientenmatrix**

Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung

1. **Lösbarkeit**

   $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ist genau dann lösbar, wenn **b** Linearkombination von $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ ist.

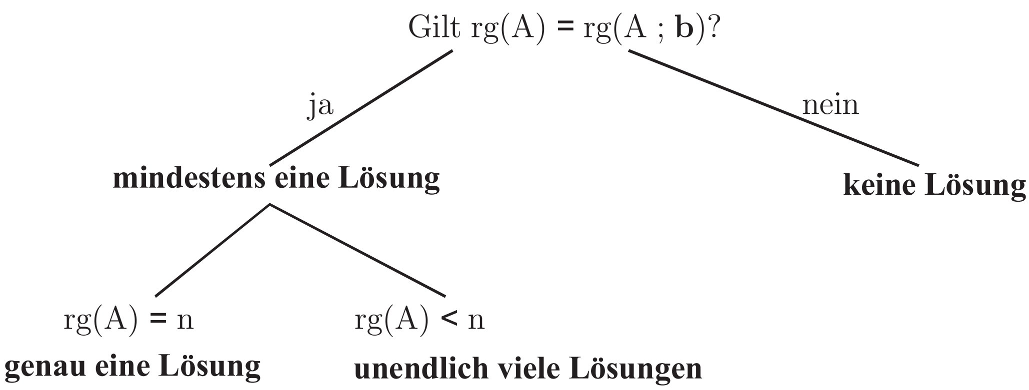
   Lösbarkeitskriterium: rg(A) = rg(A; **b**)

2. **Eindeutigkeit**

   Falls $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lösbar ist, so ist die Lösung genau dann eindeutig, falls $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ linear unabhängig sind.

   Eindeutigkeitskriterium: rg(A) = n

   Schematisch zusammengefasst:



Spezielle lineare Gleichungssysteme

1. **Homogene Gleichungssysteme**

   Ist $\mathbf{b} = \mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ . \\ . \\ 0 \end{pmatrix}$,

   so heisst das Gleichungssystem **homogen**.

   Ein homogenes Gleichungssystem besitzt immer die triviale Lösung $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Nichttriviale Lösungen $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ treten genau dann auf, wenn gilt: rg(A) $<$ n.

2. **Weniger Gleichungen als Unbekannte:** $\mathbf{m} < \mathbf{n}$

   Wegen rg(A) $\leq$ m $<$ n besitzt das Gleichungssystem **keine** oder **unendlich viele** Lösungen. Der Fall von genau einer Lösung kann nicht eintreten.

3. **Mehr Gleichungen als Unbekannte:** $\mathbf{m} > \mathbf{n}$

   Das Gleichungssystem kann **keine**, **genau eine** oder **unendlich viele** Lösungen besitzen.

4. **n Gleichungen, n Unbekannte**

   Das Gleichungssystem kann **keine**, **genau eine** oder **unendlich viele** Lösungen besitzen.

Definition:
Ein Gleichungssystem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ mit $m = n$, rg(A) = n heisst **regulär**.

Satz:
Jedes reguläre lineare Gleichungssystem besitzt **genau eine** Lösung.

Beweis:
Regularität $\Rightarrow$ rg(A) = rg(A; **b**) = n

Beispiel II.17

$$\begin{aligned} x_1 + \ & 2x_2 - & x_3 &= 1 \quad (I)\\ 2x_1 + \ & x_2 + & x_3 &= 3 \quad (II)\\ 5x_1 + \ & 4x_2 + & x_3 &= 7 \quad (III) \end{aligned}$$

$$A = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 \end{matrix} \end{array}, \ (A, \boldsymbol{b}) = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 5 & 4 & 1 & 7 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 & \boldsymbol{b} \end{matrix} \end{array}$$

Es gilt

$$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \text{ sind linear unabhängig,}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}_3 &= \boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_2 \\ \boldsymbol{b} &= \frac{5}{3}\boldsymbol{a}_1 - \frac{1}{3}\boldsymbol{a}_2 \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$rg(A) = rg(A; \mathbf{b}) = 2,$$

$$2 = rg(A) < n = 3$$

*Dementsprechend besitzt das Gleichungssystem **unendlich viele** Lösungen.*

Wie finden wir die Gesamtheit der Lösungen?

Die Gleichungen (I) und (II) sind linear unabhängig; (III) = (I) + 2 · (II). Gleichung (III) ist daher überflüssig.

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} 3x_1 + 3x_2 \qquad &= 4; \quad x_2 = \frac{4}{3} - x_1 \\ 3x_1 \qquad + 3x_3 &= 5; \quad x_3 = \frac{5}{3} - x_1 \end{aligned}$$

x_1 ist frei wählbar: $x_1 = t$, $t \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \ x_2 = \frac{4}{3} - t, x_3 = \frac{5}{3} - t$$

Lösungsgesamtheit:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{4}{3} \\ \frac{5}{3} \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} , \qquad t \in \mathbb{R} \ \ \text{beliebig.}$$

*Die Lösungsgesamtheit stellt eine **Gerade** dar.*

3.3 Reguläre lineare Gleichungssysteme

Reguläre lineare Gleichungssysteme sind für die Anwendung von besonderer Wichtigkeit. Die **eindeutige** Lösung lässt sich mit verschiedenen Methoden ermitteln.

Übersicht

a. **Anwendung der Inversen**

   $rg(A) = n \Rightarrow A^{-1}$ existiert nach Satz 2.2, Seite 68.

   $A\mathbf{x} = \mathbf{b} \qquad \Big|$ von links mit A^{-1} multiplizieren

   $\underbrace{A^{-1}A}_{I}\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$

   $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$

   Dieses Verfahren ist häufig mit einem hohen numerischen Rechenaufwand verbunden.

b. **Elimination von Variablen**

   vgl. Mittelschule

c. **Gauss'scher Algorithmus**

   Der Gauss'sche Algorithmus stellt eine systematische Methode zur vereinfachten Lösung beliebiger linearer Gleichungssysteme dar (s. Kapitel 4, S. 91).

d. **Cramer'sche Regel**

   Die Cramer'sche Regel stellt im Falle regulärer linearer Gleichungssysteme eine explizite Lösungsformel dar.

Cramer'sche Regel zum Lösen regulärer Gleichungssysteme

1. **Spezialfall n = 2** 2 Gleichungen mit 2 Unbekannten.

$$a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 = b_1$$
$$a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 = b_2$$

Wir multiplizieren die erste Gleichung mit a_{22} und die zweite mit a_{12} und subtrahieren.

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - a_{12}b_2$$

Diese Gleichung lässt sich mit Hilfe von Determinanten wie folgt schreiben:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \cdot x_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$$

d.h., wenn A regulär ist, also $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0,$

ist $x_1 = \dfrac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$ Analog: $x_2 = \dfrac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$

2. **Allgemeiner Fall**: n Gleichungen mit n Unbekannten.

$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, A regulär, hat den Lösungsvektor

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix},$$

wobei

$$
\mathrm{x}_j = \frac{\begin{array}{c} \text{j-te Spalte} \\ \downarrow \end{array} \\ \begin{vmatrix} \mathrm{a}_{11} & \dots & \mathrm{b}_1 & \dots & \mathrm{a}_{1n} \\ \mathrm{a}_{21} & \dots & \mathrm{b}_2 & \dots & \mathrm{a}_{2n} \\ . & & . & & . \\ . & & . & & . \\ \mathrm{a}_{n1} & \dots & \mathrm{b}_n & \dots & \mathrm{a}_{nn} \end{vmatrix}}{|\mathrm{A}|}
$$

Interpretation des Zählers: Wir ersetzen die j-te Kolonne der Matrix A durch die rechte Seite

$$
\mathbf{b} = \begin{pmatrix} \mathrm{b}_1 \\ . \\ . \\ \mathrm{b}_n \end{pmatrix}
$$

und bilden dann die Determinante.

Beispiel II.18

$$
\begin{aligned} 2x_1 + \quad 4x_2 + \quad 8x_3 &= 1 \\ x_1 + \quad 4x_2 + \quad 6x_3 &= 2 \\ 3x_1 + \quad 3x_2 + \quad 7x_3 &= 3 \end{aligned} \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 1 & 4 & 6 \\ 3 & 3 & 7 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad |A| = -8
$$

$$
\mathrm{x}_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 4 & 8 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 3 & 7 \end{vmatrix}}{-8} = \frac{-22}{-8} = \frac{11}{4} \qquad \mathrm{x}_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 8 \\ 1 & 2 & 6 \\ 3 & 3 & 7 \end{vmatrix}}{-8} = \frac{-21}{-8} = \frac{21}{8}
$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix}}{-8} = \frac{15}{-8} = -\frac{15}{8}$$

Hinweis:

Als numerisches Lösungsverfahren ist die Cramer'sche Regel meistens zu aufwendig. In den wirtschaftswissenschaftlichen Anwendungen enthält die erweiterte Koeffizientenmatrix (A ; **b**) jedoch häufig Parameterwerte.

In diesem Fall erweist sich die Cramer'sche Regel typischerweise als die am besten geeignete Lösungsmethode.

Beispiel II.19

Das (einfachste) Keynes'sche Modell gibt den Zusammenhang zwischen Volkseinkommen und Konsumausgaben durch folgende Gleichgewichtsbedingungen:

	Variable	
$Y = C + I_0 + G_0$	Y	*: Volkseinkommen*
$C = a + bY$	C	*: Konsumausgaben*
	Parameter	
	I_0	*: Investition*
	G_0	*: Staatsausgaben*
	b	*: Grenzneigung zum Konsum*
	a	*: Ausgaben für Existenzbedürfnisse*

Umgeordnet:

$$\begin{aligned} Y - C &= I_0 + G_0 \\ -bY + C &= a \end{aligned} \quad \textit{oder} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -b & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_0 + G_0 \\ a \end{pmatrix}$$

Nach der Cramer'schen Regel ist

$$Y = \frac{\begin{vmatrix} I_0 + G_0 & -1 \\ a & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -b & 1 \end{vmatrix}} = \frac{1}{1-b}\,(I_0 + G_0 + a)$$

Gleichgewichtseinkommen

$$C = \frac{\begin{vmatrix} 1 & I_0 + G_0 \\ -b & a \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -b & 1 \end{vmatrix}} = \frac{a + b(I_0 + G_0)}{1-b}$$

Gleichgewichtskonsum

3.4 Weitere Beispiele zur Lösbarkeit linearer Gleichungssysteme

Beispiel II.20

Für welche Werte von a besitzt das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x - \quad y + \quad z &= 2 \\ -2x + \quad y + \quad az &= -3 \\ x + \quad ay - \quad z &= 1 \end{aligned}$$

- genau eine Lösung?

- keine Lösung?

- unendlich viele Lösungen?

Das lineare Gleichungssystem ist gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & a \\ 1 & a & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Es gilt m = n = 3 und das lineare Gleichungssystem ist regulär, falls det (A) $\neq$ 0.

$$|A| = -1 - a - 2a - 1 - a^2 + 2 = -a^2 - 3a = -a(a + 3)$$

Folglich ist $|A| \neq 0$*, falls* $a \neq 0$ *und* $a \neq -3$.

a) Das lineare Gleichungssystem ist regulär und hat somit genau eine Lösung, falls $a \neq 0$, $a \neq -3$. *Gemäss Cramer'scher Regel lautet die Lösung:*

$$x = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & a \\ 1 & a & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{-\mathrm{a}(\mathrm{a}+3)} \cdot (-2 - \mathrm{a} - 3\mathrm{a} - 1 - 2\mathrm{a}^2 + 3)$$

$$= \frac{1}{\mathrm{a}(\mathrm{a}+3)} \cdot (2\mathrm{a}^2 + 4\mathrm{a}) = \frac{2(\mathrm{a}+2)}{\mathrm{a}+3}$$

$$y = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -3 & a \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{-\mathrm{a}(\mathrm{a}+3)} \cdot (3 + 2\mathrm{a} - 2 + 3 - 4 - \mathrm{a})$$

$$= \frac{1}{\mathrm{a}(\mathrm{a}+3)} \cdot (-\mathrm{a}) = \frac{-1}{\mathrm{a}+3}$$

$$z = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -3 \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{-\mathrm{a}(\mathrm{a}+3)} \cdot (1 + 3 - 4\mathrm{a} - 2 + 3\mathrm{a} - 2)$$

$$= \frac{1}{\mathrm{a}(\mathrm{a}+3)} \cdot \mathrm{a} = \frac{1}{\mathrm{a}+3}$$

b) ***Fall*** $\mathbf{a = 0}$

$$\begin{array}{rcrcrcrl} x & - & y & + & z & = & 2 & (I) \\ -2x & + & y & & & = & -3 & (II) \\ x & & & - & z & = & 1 & (III) \end{array}$$

$$(A;\mathbf{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} I \\ II \\ III \end{array}$$

$$rg(A) = rg(A;\mathbf{b}) = 2 \qquad\qquad (\textit{denn } III = -I - II)$$

Für a = 0 besitzt das lineare Gleichungssystem unendlich viele Lösungen.

Auffinden der Lösungsgesamtheit:

$$\begin{aligned} (II) &\Rightarrow -2x + y &&= -3 \\ (III) &\Rightarrow -x \quad\; + z &&= -1 \end{aligned}$$

x ist beliebig wählbar. Wir setzen x = t, $\quad t \in \mathbb{R}$

$$y = 2t - 3$$

$$z = t - 1$$

Lösungsgesamtheit:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad, t \in \mathbb{R}$$

c) ***Fall*** $\mathbf{a = -3}$

$$\begin{aligned} x - \; y + \; z &= 2 \\ -2x + \; y - 3z &= -3 \\ x - 3y - \; z &= 1 \end{aligned}$$

$$(A;\, \boldsymbol{b}) = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & -3 & -3 \\ 1 & -3 & -1 & 1 \end{array}\right) \\ \begin{array}{cccc} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 & \boldsymbol{b} \end{array} \end{array}$$

$$rg(A) = 2 \text{ ,}\textit{aber } rg(A;\mathbf{b}) = 3.$$

Nachweis:

$$det \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccc} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{b} \end{array} \end{array} = 1 + 3 + 12 - 2 - 9 - 2 = 3 \neq 0$$

*Bereits der Rang der Teilmatrix ist 3, also auch der Rang der Matrix (A; **b**).*

*Für a = -3 hat das Gleichungssystem **keine** Lösung.*

Beispiel II.21

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 3x_3 \quad &= 2 \quad (I) \\ 2x_2 - x_3 + x_4 &= 3 \quad (II) \end{aligned}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Da

$rg(A) = rg(A; \mathbf{b}) = 2$

$2 = rg(A) < n = 4$

*besitzt das lineare Gleichungssystem **unendlich viele** Lösungen.*

Die Lösungsgesamtheit lässt sich wie folgt ermitteln:

x_2 und x_3 sind frei wählbar.

Wir setzen $x_2 = t$, $x_3 = s$, $t, s \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} (I) \Rightarrow \quad x_1 &= 2 + x_2 - 3x_3 = 2 + t - 3s \\ (II) \Rightarrow \quad x_4 &= 3 - 2x_2 + x_3 = 3 - 2t + s \end{aligned}$$

Lösungsgesamtheit:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad t, s \in \mathbb{R}$$

Beispiel II.21 legt nahe, im Falle unendlich vieler Lösungen die Struktur der Lösungsmenge genauer zu untersuchen.

3.5 Struktur der Lösungsmenge

Falls rg(A) = rg(A; **b**) = r < n,

so ist die Lösungsmenge (n-r)-dimensional und lässt sich darstellen als

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}^* + t_1\,\mathbf{x}^{(1)} + t_2\,\mathbf{x}^{(2)} + \ldots + t_{n-r}\,\mathbf{x}^{(n-r)}$$

n - r linear unabhängige Vektoren

Beispiel II.22

$$\begin{array}{cccccll}
x_1 & & +x_3 & & +x_5 & = 1 & I \\
 & x_2 & & +2x_4 & & = 3 & II \\
 & & x_3 & & +x_5 & = 5 & III \\
x_1 & & +2x_3 & & +2x_5 & = 6 & IV \\
 & x_2 & -x_3 & +2x_4 & -x_5 & = -2 & V
\end{array}$$

r = rg(A) = rg(A; ***b****) = 3, denn I, II und III sind linear unabhängig,*

IV = I + III und

V = II - III sind Linearkombinationen von I, II und III.

Die Lösungsmenge hat Dimensionen $n - r = 5 - 3 = 2$*, hat also die Struktur*

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} . \\ . \\ . \\ . \\ . \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} . \\ . \\ . \\ . \\ . \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} . \\ . \\ . \\ . \\ . \end{pmatrix}, \qquad t_1, t_2 \in \mathbb{R}$$

Somit sind zwei der Unbekannten ***frei wählbar****.*

Beispielsweise stellen $x_4 = t_1$ *und* $x_5 = t_2$ *eine zulässige Wahl dar.*

Das Gleichungssystem reduziert sich damit auf

$$\begin{array}{lllllll} x_1 & & +x_3 & = 1 & & -t_2 \\ & x_2 & & = 3 & -2t_1 & \\ & & x_3 & = 5 & & -t_2 \end{array}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{array}{llll} x_1 & = -4 & & \\ x_2 & = 3 & -2t_1 & \\ x_3 & = 5 & -t_2 & \\ x_4 & = & t_1 & \\ x_5 & = & t_2 & ; \quad t_1, t_2 \in \mathbb{R} \end{array}$$

Lösungsmenge in vektorieller Darstellung

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad t_1, t_2 \in \mathbb{R}$$

4 GAUSS'SCHER ALGORITHMUS: SYSTEMATISCHES LÖSEN VON GLEICHUNGSSYSTEMEN, BERECHNUNG DER INVERSEN EINER REGULÄREN MATRIX, RANGBESTIMMUNG

Der Gauss'sche Algorithmus stellt ein systematisches Verfahren zur Lösung linearer Gleichungssysteme dar. Wegen des geringen Rechenaufwandes eignet er sich besonders als numerisches Verfahren zur Ermittlung der Lösungsmenge. Er erlaubt es aber auch, die Lösbarkeit abzuklären, und kann zur Berechnung der Inversen einer regulären Matrix sowie zur Rangbestimmung von Matrizen eingesetzt werden. Zur Herleitung des Algorithmus untersuchen wir, was die bekannten Umformungsschritte beim Lösen eines Gleichungssystems matriziell bedeuten.

4.1 Gleichungssysteme

Beispiel II.23

Gleichungssystem — *(A; **b**)*

$$\begin{array}{llcl}
(I) & x_1 + 4x_2 + 3x_3 & = & 1\\
(II) & 2x_1 + 5x_2 + 9x_3 & = & 14\\
(III) & x_1 - 3x_2 - 2x_3 & = & 5
\end{array}
\qquad
\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 1\\ 2 & 5 & 9 & 14\\ 1 & -3 & -2 & 5 \end{array}\right)
\begin{array}{l} \\ -2\cdot\ (I)\\ -\ (I) \end{array}$$

***1. Schritt**: In (II) und (III) x_1 eliminieren:*

$$\begin{array}{llcl}
(I') & x_1 + 4x_2 + 3x_3 & = & 1\\
(II') & -3x_2 + 3x_3 & = & 12\\
(III') & -7x_2 - 5x_3 & = & 4
\end{array}
\qquad
\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 1\\ 0 & -3 & 3 & 12\\ 0 & -7 & -5 & 4 \end{array}\right)
\begin{array}{l} \\ :(-3)\\ \\ \end{array}$$

***2. Schritt**: Gleichung (II') durch (-3) dividieren:*

$$\begin{array}{llcl}
(I'') & x_1 + 4x_2 + 3x_3 & = & 1\\
(II'') & x_2 - x_3 & = & -4\\
(III'') & -7x_2 - 5x_3 & = & 4
\end{array}
\qquad
\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 1\\ 0 & 1 & -1 & -4\\ 0 & -7 & -5 & 4 \end{array}\right)
\begin{array}{l} -4\cdot\ (II'')\\ \\ +\ 7\cdot\ (II'') \end{array}$$

***3. Schritt**: In (I'') und (III'') x_2 eliminieren:*

$$\begin{array}{lrcrcr} (I''') & x_1 & & + \; 7x_3 & = & 17 \\ (II''') & & x_2 & - \; x_3 & = & -4 \\ (III''') & & & - \; 12x_3 & = & -24 \end{array} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 7 & 17 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & -12 & -24 \end{array}\right) \; : (-12)$$

***4. Schritt**: Gleichung (III''') durch (-12) dividieren:*

$$\begin{array}{lrcrcr} (I'''') & x_1 & & + \; 7x_3 & = & 17 \\ (II'''') & & x_2 & - \; x_3 & = & -4 \\ (III'''') & & & x_3 & = & 2 \end{array} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 7 & 17 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} -7 \cdot (III'''') \\ + \; (III'''') \\ \end{array}$$

***5. Schritt**: In (I'''') und (II'''') x_3 eliminieren:*

$$\begin{array}{lrcccr} (I''''') & x_1 & & & = & 3 \\ (II''''') & & x_2 & & = & -2 \\ (III''''') & & & x_3 & = & 2 \end{array} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

*Durch sogenannte zulässige **Zeilenoperationen** haben wir die erweiterte Koeffizientenmatrix in eine Matrix übergeführt, in der*

***links die Einheitsmatrix I**,*

rechts der Lösungsvektor** $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ **steht.

Zulässige Operationen

a. Eine Zeile darf mit einer beliebigen Zahl $\neq 0$ multipliziert, bzw. dividiert werden.

b. Zu, bzw. von einer Zeile darf ein beliebiges Vielfaches einer anderen Zeile addiert bzw. subtrahiert werden.

c. Zeilen dürfen vertauscht werden.

Beispiel II.24

$$\begin{array}{rrrrl} & 3x_2 & +2x_3 & +3x_4 & = 8 \\ 2x_1 & -4x_2 & & +8x_4 & = -8 \\ x_1 & +x_2 & +x_3 & +4x_4 & = 0 \end{array} \qquad (A;\boldsymbol{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 3 & 2 & 3 & 8 \\ 2 & -4 & 0 & 8 & -8 \\ 1 & 1 & 1 & 4 & 0 \end{array}\right)$$

Schrittweises Vorgehen:

1. Zeilen (I) und (II) vertauschen

2. $\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -4 & 0 & 8 & -8 \\ 0 & 3 & 2 & 3 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 4 & 0 \end{array}\right)\begin{array}{l} :2 \\ \\ \\ \end{array}$

3. $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 4 & -4 \\ 0 & 3 & 2 & 3 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 4 & 0 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ -(I) \end{array}$

4. $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 4 & -4 \\ 0 & 3 & 2 & 3 & 8 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 4 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ :3 \\ \\ \end{array}$

5. $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 4 & -4 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & 1 & \frac{8}{3} \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 4 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ -3\cdot(II) \end{array}$

6. $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 4 & -4 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & 1 & \frac{8}{3} \\ 0 & 0 & -1 & -3 & -4 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ \cdot(-1) \end{array}$

7. $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 4 & -4 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & 1 & \frac{8}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 4 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ -\frac{2}{3}\cdot(III) \\ \\ \end{array}$

8. $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 4 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 4 \end{array}\right)\begin{array}{l} +2\cdot(\mathrm{II}) \\ \\ \\ \end{array}$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 4 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{cccccc} x_1 & & & +2x_4 & = & -4 \\ & x_2 & & -x_4 & = & 0 \\ & & x_3 & +3x_4 & = & 4 \end{array}$$

***Lösung**:*

Für x_4 können wir den Parameter t frei wählen:

$$x_4 = t$$

Daraus folgt für x_1, x_2 und x_3 :

$$\begin{aligned} x_1 &= -4 - 2t \\ x_2 &= t \\ x_3 &= 4 - 3t \end{aligned}$$

Vektorielle Darstellung der Lösungsmenge:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Beispiel II.25

Wir betrachten zwei Gleichungssysteme, die sich lediglich in der rechten Seite ihrer Gleichungen unterscheiden.

$$\begin{array}{cccc} x_1 & +4x_2 & +3x_3 & = 1 \\ 2x_1 & +5x_2 & +4x_3 & = 4 \\ x_1 & -3x_2 & -2x_3 & = 5 \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} x_1 & +4x_2 & +3x_3 & = -1 \\ 2x_1 & +5x_2 & +4x_3 & = 0 \\ x_1 & -3x_2 & -2x_3 & = 2 \end{array}$$

*Die beiden Systeme lassen sich **simultan** lösen:*

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 4 & 3 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & 4 & 4 & 0 \\ 1 & -3 & -2 & 5 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \textit{-2} \cdot \textit{(I)} \\ \textit{- (I)} \end{array} \qquad \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 4 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & -5 & 4 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \textit{: (-3)} \\ \\ \end{array}$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 4 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & -7 & -5 & 4 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ +7 \cdot (II) \end{array} \qquad \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 4 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{5}{3} \end{array}\right) \begin{array}{l} -4 \cdot (II) \\ +2 \cdot (III) \\ \cdot(-3) \end{array}$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{11}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 5 \end{array}\right) \begin{array}{l} -\frac{1}{3} \cdot (III) \\ \\ \\ \end{array} \qquad \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 5 \end{array}\right)$$

Lösungen:

1. System:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

2. System

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

4.2 Bestimmung der Inversen einer regulären Matrix

Beispiel II.26

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -6 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad \text{Gesucht: } A^{-1} = \begin{pmatrix} x_1 & u_1 & v_1 \\ x_2 & u_2 & v_2 \\ x_3 & u_3 & v_3 \end{pmatrix}$$

so, dass $AA^{-1} = I$, d.h.

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -6 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & u_1 & v_1 \\ x_2 & u_2 & v_2 \\ x_3 & u_3 & v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Folgende Gleichungssysteme sind zu lösen:

$$\begin{array}{rrrl} 4x_1 & & +5x_3 & = 1 \\ & x_2 & -6x_3 & = 0 \\ 3x_1 & & +4x_3 & = 0 \end{array} \qquad \begin{array}{rrrl} 4u_1 & & +5u_3 & = 0 \\ & u_2 & -6u_3 & = 1 \\ 3u_1 & & +4u_3 & = 0 \end{array} \qquad \begin{array}{rrrl} 4v_1 & & +5v_3 & = 0 \\ & v_2 & -6v_3 & = 0 \\ 3v_1 & & +4v_3 & = 1 \end{array}$$

Dies sind drei Gleichungssysteme, die sich nur durch ihre rechten Seiten unterscheiden und daher ***simultan*** *gelöst werden können.*

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 0 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{5}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{5}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & 4 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 4 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -18 & 1 & 24 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & 4 \end{array}\right)$$

Lösung:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -18 \\ -3 \end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 24 \\ 4 \end{pmatrix}$$

d.h. $$A^{-1} = \begin{pmatrix} x_1 & u_1 & v_1 \\ x_2 & u_2 & v_2 \\ x_3 & u_3 & v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -5 \\ -18 & 1 & 24 \\ -3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Allgemein:

Es sei A eine reguläre Matrix. Durch zulässige Zeilenoperationen führen wir $(\mathrm{A} \mid \mathrm{I})$ über in $(\mathrm{I} \mid \mathrm{B})$. B ist dann die gesuchte Inverse A^{-1}.

Beispiel II.27

Um von zwei Gütern die Mengen x_1, x_2 *herzustellen, sind* y_1 *Einheiten eines ersten und* y_2 *Einheiten eines zweiten Produktionsfaktors erforderlich. Es besteht folgender Zusammenhang:*

$$\begin{aligned} y_1 &= 2x_1 + x_2 \\ y_2 &= x_1 + 2x_2 \end{aligned}$$

Um den Outputvektor $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ *produzieren zu können, ist somit der Inputvektor*

$\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$, *wobei* $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, *erforderlich.*

Andererseits lässt sich jedem vorgegebenen Inputvektor $\boldsymbol{y}$ *der entsprechende Outputvektor* $\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{y}$ *zuordnen.*

Berechnung von A^{-1}*:*

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{array}\right)$$

Somit gilt

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{2}{3}\,y_1 - \frac{1}{3}\,y_2 \\ x_2 &= -\frac{1}{3}\,y_1 + \frac{2}{3}\,y_2 \end{aligned}$$

4.3 Rangbestimmung einer Matrix mittels Gauss'schem Algorithmus

Beispiel II.28

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \\ 5 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Entsteht beim Durchführen des Gauss'schen Algorithmus eine Zeile der Form $(0 \ldots 0)$, so heisst das, dass die entsprechende Ausgangszeile eine Linearkombination der übrigen Zeilen war.

Der Rang von A ist daher die Anzahl Zeilen, welche sich mittels zulässiger Zeilenoperationen **nicht** in die Form $(0\ 0 \ldots 0)$ bringen lassen.

Im Beispiel II.28:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \\ 5 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow rg(A) = 3$$

Satz:

Der Gauss'sche Algorithmus verändert den Rang einer Matrix A nicht.

4.4 Lineare Abhängigkeit, resp. Unabhängigkeit von Vektoren: Überprüfung mittels Rangbestimmung

Beispiel II.29

Sind die Vektoren

$$\boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 1 \\ -9 \end{pmatrix}$$

linear unabhängig?

Wir bestimmen den Rang der Matrix

$$A = (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & 11 & 7 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & -9 \end{pmatrix}$$

Rangbestimmung

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & 11 & 7 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & -9 \end{pmatrix} \begin{array}{l} -5 \cdot \ (III) \\ -11 \cdot \ (III) \\ \\ \\ \end{array} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & -9 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ -2 \cdot \ (I) \\ \\ -4 \cdot \ (I) \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} -2 \cdot \ (IV) \\ \\ + \ (IV) \\ \cdot(-1) \end{array} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

rg(A) = 3

Daraus folgt: $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{u}_3$ *sind linear unabhängig.*

Beispiel II.30

Bilden die Vektoren

$$\boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{u}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

eine Basis des $\mathbb{R}^4$?

$\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{u}_3$, $\boldsymbol{u}_4$ bilden genau dann eine Basis des $\mathbb{R}^4$, wenn sie linear unabhängig sind (siehe Seite 66).

Auch hier wird der Rang der Matrix $A = (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{u}_4)$ bestimmt.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ -(I) \\ \\ \\ \end{array} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ -(II) \\ -(II) \end{array}$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} -(III) \\ \\ \\ \\ \end{array} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} +0.5\,(IV) \\ +0.5\,(IV) \\ -(IV) \\ \\ \end{array}$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Aus rg (A) = 4 folgt die lineare Unabhängigkeit von $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{u}_3$, $\boldsymbol{u}_4$. Folglich bilden $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{u}_3$, $\boldsymbol{u}_4$ eine Basis des $\mathbb{R}^4$.

5 EIGENWERTE UND EIGENVEKTOREN EINER QUADRATISCHEN MATRIX A

In den Wirtschaftswissenschaften werden Eigenwerte und Eigenvektoren vorwiegend in folgenden Bereichen benützt:

- Stabilitätsuntersuchungen ökonomischer Systeme
- Wachstumsmodelle mit mehreren Sektoren
- Statistik und Ökonometrie

Beispiel II.31 (Einführung)

Einkommensentwicklung in einer Volkswirtschaft mit 2 Sektoren.
Es bezeichne

$$\begin{array}{l} x_{1,t} \text{ Einkommen Sektor 1 in Periode } t \\ x_{2,t} \text{ Einkommen Sektor 2 in Periode } t \end{array} \quad t = 0, 1, \ldots$$

Für die Volkswirtschaft gelte folgende Dynamik bei der Einkommensentwicklung

$$\begin{array}{rl} x_{1,t+1} = & x_{1,t} + 0.4x_{2,t} \\ x_{2,t+1} = & 0.3x_{1,t} + 0.6x_{2,t} \end{array} \quad t = 0, 1, \ldots$$

In Matrixschreibweise gilt somit

$$\mathbf{x}_{t+1} = \mathrm{A}\mathbf{x}_t \quad , \ t = 0, 1, \ldots$$

wobei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0.4 \\ 0.3 & 0.6 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x_t} = \begin{pmatrix} x_{1,t} \\ x_{2,t} \end{pmatrix}$$

Variante 1

Gilt für die Volkswirtschaft im Zeitpunkt 0

$$\mathbf{x_0} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

so folgt

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x_1} = \quad A\boldsymbol{x_0} &= \begin{pmatrix} 1 & 0.4 \\ 0.3 & 0.6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.4 \\ 0.9 \end{pmatrix} \\ \boldsymbol{x_2} = \quad A\boldsymbol{x_1} &= \begin{pmatrix} 1 & 0.4 \\ 0.3 & 0.6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1.4 \\ 0.9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.76 \\ 0.96 \end{pmatrix} \\ \vdots \quad \vdots & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \end{aligned}$$

Variante 2

Von besonderem Interesse ist die Ausgangssituation

$$\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x_1} = \quad A\boldsymbol{x_0} &= \begin{pmatrix} 1 & 0.4 \\ 0.3 & 0.6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.4 \\ 1.2 \end{pmatrix} = 1.2\, \boldsymbol{x_0} \\ \boldsymbol{x_2} = \quad A\boldsymbol{x_1} &= \begin{pmatrix} 1 & 0.4 \\ 0.3 & 0.6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2.4 \\ 1.2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.88 \\ 1.44 \end{pmatrix} = 1.2^2\, \boldsymbol{x_0} \\ \vdots \quad \vdots & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\quad \vdots \\ \boldsymbol{x_T} = \quad A\boldsymbol{x_{T-1}} &= \quad \ldots \qquad\qquad \ldots \quad = 1.2^T\, \boldsymbol{x_0} \end{aligned}$$

In beiden Sektoren wachsen die Einkommen mit demselben konstanten Faktor 1.2. Es liegt ein ***dynamisches Gleichgewicht*** *vor.*

Dieser Sachverhalt ist auf die spezielle Wahl von $\mathbf{x}_0 = \boldsymbol{x}^* = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ *zurückzuführen. Es gilt nämlich*

$$A\boldsymbol{x}^* = 1.2\boldsymbol{x}^*.$$

Eigenwertproblem

Gegeben: quadratische Matrix $A_{n \times n}$

Gesucht: $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ($\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$), so dass

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$$

Definition:

Gegeben sei eine quadratische Matrix $A_{n \times n}$.

$\lambda \in \mathbb{R}$ heisst **Eigenwert** von A,

$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ($\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$) heisst zugehöriger **Eigenvektor**,

falls

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}.$$

Berechnung von Eigenwerten und Eigenvektoren

$$\begin{aligned} A\mathbf{x} &= \lambda\mathbf{x} \\ A\mathbf{x} &= \lambda I\mathbf{x} \\ (A - \lambda I)\mathbf{x} &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

Dieses homogene lineare Gleichungssytem besitzt genau dann Lösungen $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, wenn $A - \lambda I$ singulär ist (vgl. S. 78ff),

d.h.

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1, \lambda_2, \ldots \qquad \text{Eigenwerte von A}$$

Zugehörige Eigenvektoren

$$(A - \lambda_1 I)\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x}^{(1)} \text{ Eigenvektor zu } \lambda_1$$

$$(A - \lambda_2 I)\mathbf{x}^{(2)} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x}^{(2)} \text{ Eigenvektor zu } \lambda_2$$

Dies führt zur folgenden Vorgehensweise:

Gegeben:	quadratische Matrix $A_{n \times n}$		
Schritt 1:	$\det(A - \lambda I) = 0$	$\Rightarrow$	Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$
Schritt 2:	$(A - \lambda_1 I)\mathbf{x}^{(1)} = 0$	$\Rightarrow$	Eigenvektor $\mathbf{x}^{(1)}$ zu λ_1
	$(A - \lambda_2 I)\mathbf{x}^{(2)} = 0$	$\Rightarrow$	Eigenvektor $\mathbf{x}^{(2)}$ zu λ_2
	$\vdots$		$\vdots$

Beispiel II.32

Gegeben $\quad A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

***Schritt 1**:* *Eigenwerte*

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 4 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{aligned} (2-\lambda)(-1-\lambda)-4 &= 0 \\ \lambda^2-\lambda-6 &= 0 \\ (\lambda-3)(\lambda+2) &= 0 \end{aligned}$$

Eigenwerte von A: $\lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = -2$

***Schritt 2**:* *Eigenvektoren*

$\lambda_1 = 3$:

$$(A-\lambda_1 I)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} -x_1 + 4x_2 &= 0 \\ x_1 - 4x_2 &= 0 \\ \hline x_1 &= 4\,x_2 \end{aligned}$$

Setze $x_2 = c \quad \Rightarrow \quad x_1 = 4c$

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix},\ c \in \mathbb{R}$$

Eigenvektor zu $\lambda_1 = 3$

$\lambda_2 = -2$:

$$(A-\lambda_2 I)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} 4x_1 + 4x_2 &= 0 \\ x_1 + x_2 &= 0 \\ \hline x_1 &= -\,x_2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; c \in \mathbb{R}$$

Eigenvektor zu $\lambda_2 = -2$

Beispiel II.33

Gegeben

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

***Schritt 1**:* *Eigenwerte*

$$det\,(C - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{aligned} (1-\lambda)^3 - (1-\lambda) &= 0 \\ (1-\lambda)\,[(1-\lambda)^2 - 1] &= 0 \\ (1-\lambda)\,(\lambda^2 - 2\lambda) &= 0 \\ \lambda(1-\lambda)(\lambda - 2) &= 0 \end{aligned}$$

Eigenwerte von C: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 2$

***Schritt 2**:* *Eigenvektoren*

$\lambda_1 = 0$

$$(C - \lambda_1 I) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Gauss'scher Algorithmus

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} -2\cdot II \\ \\ +II \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \cancel{1} & \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{0} \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{lll} x_1 & +x_3 & = 0 \\ & x_2 & = 0 \end{array}$$

---

x_3 *ist frei wählbar:* $\quad x_3 = c,\ c \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \quad x_1 = -c,\ x_2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ c \in \mathbb{R}$$

Eigenvektor zu $\lambda_1 = 0$

$\lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = 2$

Analoge Berechnungen ergeben

$$\boldsymbol{x}^{(2)} = c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix},\ c \in \mathbb{R},\ \textit{Eigenvektor zu } \lambda_2 = 1$$

$$\boldsymbol{x}^{(3)} = c \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ c \in \mathbb{R},\ \textit{Eigenvektor zu } \lambda_3 = 2$$

6 VERMISCHTE AUFGABEN

1. *Man bestimme die Determinante und die Inverse der folgenden Matrizen:*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

2. *Bestimmen Sie die Eigenwerte der Matrizen A, B und C, sowie die Eigenvektoren von C.*

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

3. *Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

4. *A und B seien beliebige reguläre Matrizen.*
   Welche der folgenden Aussagen sind richtig, welche falsch?
   Bei falschen Aussagen ist ein Gegenbeispiel anzugeben.
   a. $(A^3)^{-1} = (A^{-1})^3$
   b. $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$
   c. $(A + B)^{-1} = A^{-1} + B^{-1}$
   d. $(3A)^{-1} = 3A^{-1}$
   e. $\left| A^{-1} \right| = \dfrac{1}{|A|}$

5. *Lösen Sie die nachfolgenden Gleichungssysteme.*

a.
$$\begin{aligned} 2x &- y &+ z &= -1 \\ x &+ 3y &+ 2z &= 5 \\ x &- 4y &- z &= -6 \end{aligned}$$

b.
$$\begin{aligned} x &+ y & & &= 3 \\ & y &+ z & &= 5 \\ x &- y &+ z &- w &= -2 \end{aligned}$$

6. *Bestimmen Sie A^3 und S^{10} mit*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

7. *Welcher Vektor mit der Länge 1 steht senkrecht auf* $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ *und* $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ *?*

8. *Für die Matrizen A und B prüfe man, ob die Operationen a1. bis a3. definiert sind. Geben Sie gegebenenfalls das Ergebnis an.*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 10 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

a1. $A\,B\,B^{T}$ *a2.* $A\,B^{T}\,B$ *a3.* $B^{T}\,A\,B$

9. *Über die beiden Vektoren* $\vec{u}$ *und* $\vec{v}$ *(in* $\mathbb{R}^2$*) weiss man:*

i. $\|\vec{u}\| = 3$

ii. $\|\vec{v}\| = 4$

iii. $\vec{u} + \vec{v}$ *und* $\vec{u} - \vec{v}/2$ *stehen senkrecht aufeinander.*

Berechnen Sie den Zwischenwinkel zwischen $\vec{u}$ *und* $\vec{v}$.

10.*a. Für welche Werte des Parameters u hat das Gleichungssystem*

$$\begin{aligned} x_1 + \quad x_2 - \quad x_3 &= 1 \\ 2x_1 + \ 3x_2 + \ ux_3 &= 3 \\ x_1 + \ ux_2 + \ 3x_3 &= 2 \end{aligned}$$

a1 *genau eine Lösung?*

a2 *unendlich viele Lösungen?*

a3 *keine Lösung?*

b. Gesucht sind alle Lösungen des obigen Gleichungssystems für

b1 u = 3. *b2 u = 2.*

11.*a. Für welche Werte m, p hat das Gleichungssystem*

$$\begin{aligned} 4x_1 - mx_2 + x_3 &= 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 &= 3 \\ mx_1 - x_2 - x_3 &= p \end{aligned}$$

a1 *genau eine Lösung?*

a2 *unendlich viele Lösungen?*

a3 *keine Lösung?*

b. Gesucht sind alle Lösungen des obigen Gleichungssystems

für m = 2 und p = −7.

Lösungen:

1. $|A| = -6$, $|B| = 10$, $|C| = 1$, $|D| = 7$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B^{-1} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} -3 & -1 & 5 \\ 1 & -3 & 5 \\ 5 & 5 & -5 \end{pmatrix},$$

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & -1 & 6 \\ 1 & 0 & -1 \\ 9 & 2 & -10 \end{pmatrix}, \quad D^{-1} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -4 & 5 & 6 \\ 3 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

2. *Matrix A:* $\lambda_1 = 7$ $\lambda_2 = 2$

   Matrix B: $\lambda_1 = 1$ $\lambda_2 = 1 + \sqrt{3}$ $\lambda_3 = 1 - \sqrt{3}$

   Matrix C: $\lambda_1 = 0$ $\lambda_2 = 2$ $\lambda_3 = 3$

   zugehörige Eigenvektoren:

$$c_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \; c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbf{R}$$

3. $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$

   zugehörige Eigenvektoren:

$$c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0.5 \end{pmatrix}, \; c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}, \; c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbf{R}$$

4. a. *richtig*
   b. *falsch*
   c. *falsch*
   d. *falsch*
   e. *richtig*

5. a. $$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{7} \\ \frac{11}{7} \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -\frac{5}{7} \\ -\frac{3}{7} \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbb{R}$$

b. $$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbb{R}$$

6. $$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad S^{10} = \begin{pmatrix} 3^9 & 3^9 & 3^9 \\ 3^9 & 3^9 & 3^9 \\ 3^9 & 3^9 & 3^9 \end{pmatrix}$$

7. $$x^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} -\frac{3\sqrt{35}}{35} & -\frac{5\sqrt{35}}{35} & +\frac{\sqrt{35}}{35} \end{pmatrix}$$

8. a1. $\begin{pmatrix} 96 & 217 \\ 104 & 28 \end{pmatrix}$

a2. *nicht möglich*

a3. $\begin{pmatrix} 95 & 109 & 200 \\ 55 & 29 & 40 \\ 80 & 16 & 0 \end{pmatrix}$

9. $\theta = 99{,}6^\circ$

10. a1. $u \neq -3 \qquad u \neq 2$

a2. $u = 2$

a3. $u = -3$

b1. $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} \end{pmatrix}$

b2. $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad t \in \mathbb{R}$

11. a1. $m \neq -3, \quad m \neq 2, \quad p$ *beliebig*

a2. $m = -3$ *und* $p = -2$ *oder* $m = 2$ *und* $p = -7$

a3. $m = -3$ *und* $p \neq -2$ *oder* $m = 2$ *und* $p \neq -7$

b. $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad t \in \mathbb{R}$

7 METHODE DER KLEINSTEN QUADRATE

7.1 Einfache lineare Regression

Problemstellung:

Es geht darum, den Zusammenhang zwischen zwei Zufallsgrössen "möglichst gut" durch eine mathematische Funktion zu beschreiben. Z.B. sind

- die Ferienausgaben eines Haushaltes eine "Funktion" des Einkommens,
- die Stückkosten bei einem gewissen Fertigungsprozess eine "Funktion" der Losgrösse etc.

Es liege eine Stichprobe (x_1, y_1), (x_2, y_2), …, (x_n, y_n) vor.

Beispiel II.34

Losgrösse x_i	*1*	*2*	*6*	*9*	*12*	
Stückkosten y_i	*96*	*72*	*60*	*36*	*24*	*Fr.*

Modellansatz:

Eine Funktion vom Typ y = f(x; a, b, c, …), wobei a, b, c, … noch zu bestimmende Parameter sind, beschreibt den Zusammenhang zwischen x und y.

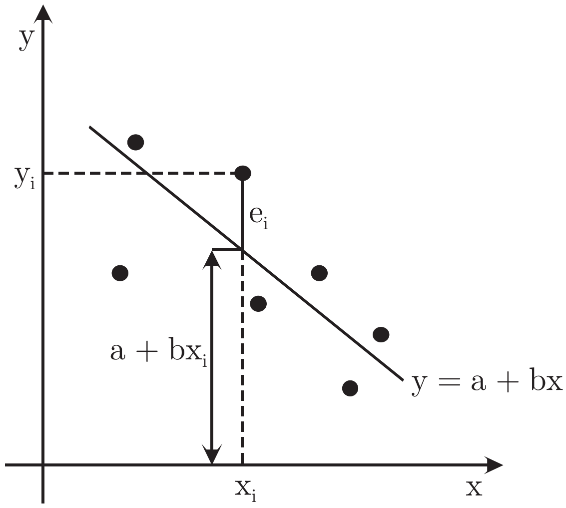
Im Folgenden beschränken wir uns auf den **linearen** Modellansatz

$$y = a + bx,$$

wobei a, b die noch zu bestimmenden Parameter darstellen.

Bestimmung der Parameter nach der "Methode der kleinsten Quadrate"

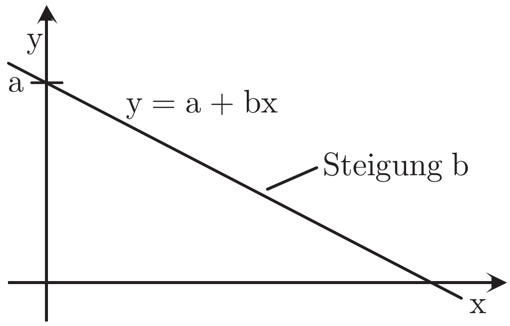
Gesucht ist diejenige Wahl der Parameter, welche die Stichprobe "am besten" erklärt. Diejenigen Werte a und b, für welche die Gerade "möglichst nahe" bei allen Punkten verläuft.



Dem x-Wert	x_i, i = 1, . . . , n	entsprechen somit
	y_i	beobachteter Wert
	$\hat{y}_i = a + bx_i$	theoretischer Wert

Die Abweichung $e_i = y_i - \hat{y}_i = y_i - (a + bx_i)$
wird **Residuum** genannt.

Durch **jede** Wahl von (a, b) ist eine Gerade festgelegt.



Bei der **Methode der kleinsten Quadrate** wird diejenige Gerade gewählt, welche die Summe der Quadrate der Residuen **minimiert**.

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \min}$$

Folglich ist die Funktion

$$F(a, b) = \sum_{i=1}^{n}(y_i - (a + bx_i))^2 = \sum_{i=1}^{n} e_i^2$$

zu minimieren.

Benutzt man die Vektorschreibweise

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ . \\ . \\ y_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ . \\ . \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e} = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ . \\ . \\ e_n \end{pmatrix},$$

so gilt

$$\mathbf{e} = \mathbf{y} - (a\mathbf{u} + b\mathbf{x})$$

und es folgt

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} e_i^2 &= \|\mathbf{e}\|^2 = \mathbf{e} \bullet \mathbf{e} \\ &= (\mathbf{y} - a\mathbf{u} - b\mathbf{x}) \bullet (\mathbf{y} - a\mathbf{u} - b\mathbf{x}) \\ &= \mathbf{y} \bullet \mathbf{y} - 2a\mathbf{u} \bullet \mathbf{y} - 2b\mathbf{x} \bullet \mathbf{y} + a^2\mathbf{u} \bullet \mathbf{u} + 2ab\mathbf{u} \bullet \mathbf{x} + b^2\mathbf{x} \bullet \mathbf{x} \\ &= F(a, b) \end{aligned}$$

Notwendige Bedingung für F(a, b) = min

$$\frac{\partial F}{\partial a} = 2a\mathbf{u} \bullet \mathbf{u} + 2b\mathbf{u} \bullet \mathbf{x} - 2\mathbf{u} \bullet \mathbf{y} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial b} = 2a\mathbf{u} \bullet \mathbf{x} + 2b\mathbf{x} \bullet \mathbf{x} - 2\mathbf{x} \bullet \mathbf{y} = 0$$

Daraus resultieren die sogenannten Normalgleichungen zur Bestimmung von a, b:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u} \bullet \mathbf{u} & \mathbf{u} \bullet \mathbf{x} \\ \mathbf{x} \bullet \mathbf{u} & \mathbf{x} \bullet \mathbf{x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{u} \bullet \mathbf{y} \\ \mathbf{x} \bullet \mathbf{y} \end{pmatrix}$$

Durch Ausrechnen der Skalarprodukte erhält man folgende Darstellung der **“Normalgleichungen”**:

$$\boxed{\begin{array}{lll} a \cdot n & + b \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i & = \sum_{i=1}^{n} y_i \\ a \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i & + b \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & = \sum_{i=1}^{n} x_i \, y_i \end{array}}$$

Anwendung auf Beispiel II.34

Losgrösse x_i	1	2	6	9	12	
Stückkosten y_i	96	72	60	36	24	Fr.

$$n = 5 \quad ; \quad \sum x_i = 30 \quad ; \quad \sum x_i^2 = 266 \quad ; \quad \sum y_i = 288 \quad ; \quad \sum x_i\, y_i = 1212$$

also:

$$\begin{aligned} 5a &+ 30b &= 288 \\ 30a &+ 266b &= 1212 \end{aligned}$$

Lösung:

$$a = 93.6 \qquad b = -6 \qquad y = 93.6 - 6x$$

Gemäss der Cramer'schen Regel (S. 82) lautet die **allgemeine Lösung der Normalgleichungen**:

$$\boxed{\begin{aligned} a &= \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i}{n \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2} \\[2ex] b &= \frac{n \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i}{n \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2} \end{aligned}} \qquad (*)$$

Bemerkungen:

1. Folgende Umformung von (*) ist möglich:

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} \quad , \; a = \bar{y} - b\bar{x},$$

$$\text{wobei } \bar{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i,$$

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i.$$

Die Regressionsgerade ist somit gegeben durch

$$\mathrm{y} = \bar{\mathrm{y}} + \frac{\sum_{i=1}^{n}(\mathrm{x}_i - \bar{\mathrm{x}})(\mathrm{y}_i - \bar{\mathrm{y}})}{\sum_{i=1}^{n}(\mathrm{x}_i - \bar{\mathrm{x}})^2} \cdot (\mathrm{x} - \bar{\mathrm{x}})$$

Folgerung:

Der Punkt $(\bar{\mathrm{x}}, \bar{\mathrm{y}})$ liegt immer auf der Regressionsgeraden.

2. Ohne Beweis sei erwähnt, dass die "Normalgleichungen" immer zu einem **globalen Minimum** von F(a, b) führen.

3. Selbstverständlich wird die Regressionsrechnung normalerweise mit Computerprogrammen durchgeführt. Die nachfolgenden Beispiele sollen lediglich die Methode illustrieren. Wegen der Übersichtlichkeit wurde in diesen Beispielen ein sehr kleiner Stichprobenumfang gewählt. Eine statistische Interpretation der Regressionsgleichungen ist nur bei einem wesentlich grösseren Stichprobenumfang möglich.

Beispiel II.35

x bezeichne den Preis pro Einheit eines Gutes,
y die nachgefragte Menge.
Die folgende Stichprobe wurde beobachtet:

Preis x_i	*5*	*6*	*7*	*8*
Menge y_i	*12*	*8*	*7*	*5*

a) Wir unterstellen einen ***linearen Zusammenhang*** *zwischen Preis und nachgefragter Menge: y = a + bx.*

x_i	y_i	$x_i y_i$	x_i^2
5	*12*	*60*	*25*
6	*8*	*48*	*36*
7	*7*	*49*	*49*
8	*5*	*40*	*64*
26	*32*	*197*	*174*

Gemäss Formel (*) ist

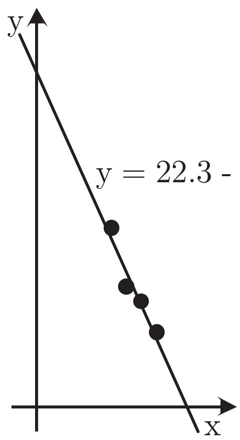
$$a = \frac{32 \cdot 174 - 26 \cdot 197}{4 \cdot 174 - 26^2} = 22.3$$

$$b = \frac{4 \cdot 197 - 26 \cdot 32}{4 \cdot 174 - 26^2} = -2.2$$

***Lösung**:*

$y = 22.3 - 2.2x$

Die obige Gleichung beschreibt - in statistischem Sinn - den Zusammenhang zwischen Preis und Nachfrage.



b) Unterstellen wir den nichtlinearen Zusammenhang

$$y = \frac{c}{x^\alpha}; \quad mit \ \alpha > 0$$

so lässt sich diese Modellgleichung durch Logarithmieren überführen in

$$\ln y = \ln c - \alpha \ln x.$$

Somit besteht ein linearer Zusammenhang zwischen ln x und ln y.

Die Regressionsgleichung lautet

$$\ln y = a + b \ln x, \quad \text{wobei } a = \ln c,\ b = -\alpha$$

$ln\ x_i = u_i$	$ln\ y_i = v_i$	$u_i v_i$	u_i^2
1.60944	2.48491	3.99930	2.59029
1.79176	2.07944	3.72586	3.21040
1.94591	1.94591	3.78657	3.78675
2.07944	1.60944	3.34673	4.32408
7.42655	8.11970	14.8585	13.9113

Aus Formel (*), S. 116, errechnen wir:

$$a = ln\ c = 5.31$$
$$b = -\ \alpha = -1.77$$

***Lösung**:*

ln y = 5.31 - 1.77 ln x

7.2 Multiple Regression

Problemstellung

Ökonomische Grössen (z.B. Geldmenge) lassen sich häufig durch mehrere Variablen (z.B. Volkseinkommen, Zinssatz, etc.) erklären.

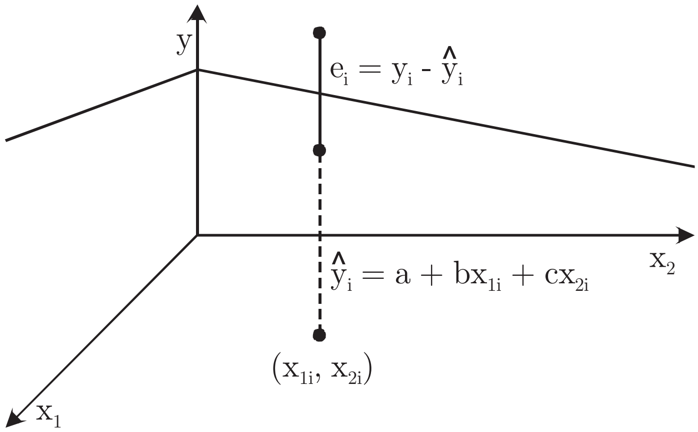
Wir beschränken uns auf den Modellansatz

$$y = a + bx_1 + cx_2$$

wobei	y	abhängige Variable
	x_1, x_2	erklärende Variablen
	a, b, c	zu bestimmende Parameter

Gegeben sei die Stichprobe

$(x_{1i}, x_{2i}; y_i)$, i = 1, 2, …, n



Dem Paar (x_{1i}, x_{2i}), i = 1, 2 . . . , n entsprechen somit

y_i	beobachteter Wert
$\hat{y}_i = a + bx_{1i} + cx_{2i}$	theoretischer Wert

und das zugehörige Residuum beträgt

$$e_i = y_i - \hat{y}_i = y_i - (a + bx_{1i} + cx_{2i}).$$

Gemäss der Methode der kleinsten Quadrate ist die Funktion

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} e_i^2 &= \sum_{i=1}^{n} [\, y_i - (\, a + bx_{1i} + cx_{2i})]^2 \\ &= F\,(a, b, c) \end{aligned}$$

zu minimieren.

Unter Verwendung der Vektorschreibweise

$$\mathbf{x_1} = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ . \\ . \\ x_{1\,n} \end{pmatrix}, \mathbf{x_2} = \begin{pmatrix} x_{21} \\ x_{22} \\ . \\ . \\ x_{2\,n} \end{pmatrix}, \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ . \\ . \\ y_n \end{pmatrix}, \mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ . \\ . \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{e} = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ . \\ . \\ e_n \end{pmatrix}$$

erhält man

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} e_i^2 &= \|\mathbf{e}\|^2 = \mathbf{e} \bullet \mathbf{e} \\ &= [\mathbf{y} - (\, a\mathbf{u} + \, b\mathbf{x_1} + \, c\mathbf{x_2})] \bullet [\mathbf{y} - (\, a\mathbf{u} + \, b\mathbf{x_1} + \, c\mathbf{x_2})] \\ &= F(a, b, c) \end{aligned}$$

Die notwendigen Bedingungen für ein Minimum von F (a, b, c) lauten:

$$\frac{\partial F}{\partial a} = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial b} = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial c} = 0$$

In Analogie zur einfachen linearen Regression resultieren die “Normalgleichungen” zur Bestimmung von a, b, c:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u} \bullet \mathbf{u} & \mathbf{u} \bullet \mathbf{x_1} & \mathbf{u} \bullet \mathbf{x_2} \\ \mathbf{x_1} \bullet \mathbf{u} & \mathbf{x_1} \bullet \mathbf{x_1} & \mathbf{x_1} \bullet \mathbf{x_2} \\ \mathbf{x_2} \bullet \mathbf{u} & \mathbf{x_2} \bullet \mathbf{x_1} & \mathbf{x_2} \bullet \mathbf{x_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{u} \bullet \mathbf{y} \\ \mathbf{x_1} \bullet \mathbf{y} \\ \mathbf{x_2} \bullet \mathbf{y} \end{pmatrix}$$

Bemerkung:

Auch im Falle der multiplen linearen Regression führen die Normalgleichungen zu einem Minimum von F(a, b, c).

III. EINFÜHRUNG IN DIE THEORIE DER DIFFERENZENGLEICHUNGEN

1 EINLEITUNG. BEGRIFFE

a. **Einführung**

Gesucht: Zeitliche Entwicklung eines Vermögens V_t, t = 1, 2, ...

bei konstantem Zinssatz i und konstanten Konsumausgaben C.

Bekannt: Anfangsvermögen V_0, Zinsrate i, Konsumausgaben C.

Die zeitliche Entwicklung von V_{t+1} ist gegeben durch

$$V_{t+1} = (1+ i)V_t - C \quad , \quad t = 0, 1, 2, \ldots \quad (*)$$

Probleme von diesem Typ haben wir bereits in der Zinseszinsrechnung angetroffen. Die Formel aus Band I, S. 16 liefert uns die Lösung

$$V_t = (1+ i)^t \left[V_0 - \frac{C}{i} \right] + \frac{C}{i} \quad , \quad t = 0, 1, 2, \ldots$$

Bemerkung: Bei (*) handelt es sich um den Spezialfall einer **Differenzengleichung**. In diesem Kapitel wird eine allgemeine Lösungsformel für Differenzengleichungen hergeleitet und das Lösungsverhalten diskutiert.

b. **Begriffe**

Eine Differenzengleichung gibt **Gesetzmässigkeiten** in der **zeitlichen Entwicklung** einer (zunächst unbekannten) Funktion y_t an, in folgendem Sinne:

1. Die Zeit wird als **diskret** betrachtet (t = 0, 1, 2, ...), d.h. man betrachtet die Grösse an **regelmässig aufeinanderfolgenden** Zeitpunkten.
2. Die Gleichung verknüpft die **Werte** der Funktion an zwei, drei oder eventuell mehr aufeinanderfolgenden Zeitpunkten.

Beispiel III.1

(i) $y_{t+1} = 3y_t - 5$

(ii) $y_{t+2} + 5y_{t+1} - 7y_t = 9$

(iii) $y_t - t \cdot (y_{t-1})^3 + y_{t-2} = 3^t$

Bemerkung:

Für die diskrete Variable t (t = 0, 1, 2, . . .) wird häufig auch das Symbol k (k = 0, 1, 2, . . .) verwendet.

Eine Differenzengleichung, die die unbekannte Funktion an **zwei aufeinanderfolgenden** Zeitpunkten verknüpft, heisst **Differenzengleichung 1. Ordnung** (Beispiel (i)), eine solche, die die Grösse an **drei aufeinanderfolgenden** Zeitpunkten verknüpft, heisst Differenzengleichung 2. Ordnung (Beispiele (ii), (iii)).

Ferner unterscheidet man **lineare** (Beispiele (i) und (ii)) und **nichtlineare** (Beispiel (iii)) Differenzengleichungen.

Wir werden unsere Überlegungen auf **lineare Differenzengleichungen 1. und 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten** beschränken.

c. **Lösung einer Differenzengleichung**

1. Die **allgemeine** Lösung einer Differenzengleichung ist die Menge aller Funktionen (Folgen), die die angegebene Gesetzmässigkeit erfüllen.

Beispiel III.2

Die allgemeine Lösung der Differenzengleichung

$$y_{k+1} = 2y_k$$

ist die Menge der Folgen

$$y_k = c \cdot 2^k, \quad c \in \mathbb{R} \text{ beliebig,} \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

2. Lösung eines **“Anfangswertproblems”**: Aus der Klasse der Lösungen ist diejenige zu wählen, die eine (oder zwei) Anfangsbedingungen erfüllt, d.h. diejenige, für welche die Funktion **zu einem festgelegten Zeitpunkt** (häufig $t = 0$) **einen vorgegebenen Wert** annimmt.

Im Beispiel III.2:

$$y_0 = 3$$

Lösung:

$$y_k = 3 \cdot 2^k, \qquad k = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

d. **Anwendungen von Zeitreihen in den Wirtschaftswissenschaften**

Ökonomische Theorie

Ein dynamisches ökonomisches Modell verknüpft ökonomische Grössen (z.B. Volkseinkommen Y, Investition I, Konsum C, Anlagekapital K usw.) zu verschiedenen Zeitpunkten.

Da ökonomische Daten häufig in **regelmässigen Zeitabständen** erhoben werden, sind **Differenzengleichungen** als Instrumentarium zur Analyse dynamischer Modelle besonders geeignet.

Empirische Wirtschaftsforschung

Bei der Analyse ökonomischer Zeitreihen (Inflationsraten, Zinssätze, Arbeitslosenraten, etc.) stellt man in Übereinstimmung mit der Theorie häufig fest, dass der Wert im Zeitpunkt t von den in den Vorperioden realisierten Werten abhängt. In der empirischen Wirtschaftsforschung wird die Dynamik von Zeitreihen mit Hilfe von Differenzengleichungen untersucht.

2 DIE LINEARE DIFFERENZENGLEICHUNG 1. ORDNUNG (MIT KONSTANTEN KOEFFIZIENTEN)

Eine **lineare Differenzengleichung 1. Ordnung** mit konstanten Koeffizienten lässt sich wie folgt darstellen:

(1) $$\boxed{\begin{array}{c} y_{k+1} = Ay_k + B; \quad A, B \in \mathbf{R}; \quad k = 0, 1, 2, \ldots \\ \text{wobei } A \neq 0 \end{array}}$$ **Normalform**

Gesucht ist die **"allgemeine Lösung"**, d.h. die Gesamtheit aller Funktionen (oder Folgen) y_k, welche **für alle k** die Gleichung (1) erfüllen.

Für beliebig vorgegebenes y_0 folgt

$y_1 = Ay_0 + B$

$y_2 = Ay_1 + B = A^2y_0 + AB + B$

$y_3 = Ay_2 + B = A^3y_0 + A^2B + AB + B$

$\vdots$

$$y_k = Ay_{k-1} + B = A^ky_0 + A^{k-1}B + \ldots\ldots\ldots\ldots + AB + B$$
$$= A^ky_0 + B\underbrace{(1 + A + \ldots.. + A^{k-1})}_{\text{geometrische Reihe}}$$

(2) $$\boxed{\begin{array}{lll} y_k = & A^k \cdot y_0 + B\dfrac{1 - A^k}{1 - A} & \text{für } A \neq 1 \\ & & \\ y_k = & y_0 + B \cdot k & \text{für } A = 1 \end{array}}$$

Für **jedes y_0** gibt es also genau eine Lösungsfunktion y_k; (2) stellt eine **ein**parametrige Gesamtheit von Lösungsfunktionen dar.

Für den Fall $\mathbf{A \neq 1}$ formen wir (2) um:

$$y_k = A^k\left(y_0 - \frac{B}{1 - A}\right) + \frac{B}{1 - A}$$

Also ist (2) äquivalent mit

(3) $$\boxed{y_k = A^k(y_0 - y^*) + y^*, \quad \text{wobei } y^* = \frac{B}{1 - A}, \quad A \neq 1}$$

Lösungsformel für $A \neq 1$

Beispiel III.3

$y_{k+1} = 2y_k + 1$;

Anfangswert $y_0 = 0.5$

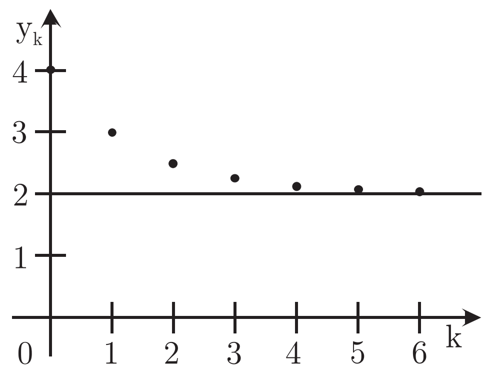
Es ist $\mathrm{A} = 2, \; \mathrm{B} = 1, \; \mathrm{y}^* = \dfrac{\mathrm{B}}{1 - \mathrm{A}} = -1$

Lösung:

$y_k = 2^k[0.5 - (-1)] - 1 = 1.5 \cdot 2^k - 1 \qquad \lim\limits_{k\to\infty} y_k = \infty$

Beispiel III.4

Graphische Darstellung



$2y_{k+1} - y_k = 2$; $y_0 = 4$

Normalform

$y_{k+1} = \dfrac{1}{2}y_k + 1$

$A = \dfrac{1}{2}$, $B = 1$; $y^* = \dfrac{B}{1 - A} = 2$

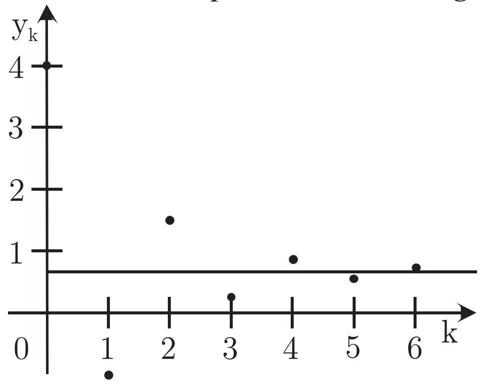
Lösung:

$$y_k = \left(\frac{1}{2}\right)^k (4 - 2) + 2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} + 2$$

$$\lim_{k \to \infty} y_k = y^* = 2$$

Beispiel III.5

Graphische Darstellung



$$2y_{k+1} + y_k = 2; \; y_0 = 4$$

Normalform

$$y_{k+1} = -\frac{1}{2}y_k + 1$$

$$A = -\frac{1}{2}, \; B = 1; \; y^* = \frac{2}{3}$$

Lösung:

$$y_k = \left(-\frac{1}{2}\right)^k \cdot \frac{10}{3} + \frac{2}{3}$$

$$\lim_{k \to \infty} = y^* = \frac{2}{3}$$

Untersuchung des Lösungsverhaltens

1. Für $A \neq 1$ folgt aus der Lösungsformel (3)

$$y_k - y^* = A^k(y_0 - y^*)$$

und wir gelangen zu folgendem Schema

Fall	$y_k - y^*$	Eigenschaften von y_k
$A > 0$	$y_k - y^*$ monoton	y_k monoton
$A < 0$	$y_k - y^*$ alternierendes Vorzeichen	y_k oszillierend
$\lvert A\rvert > 1$	$\lvert y_k - y^*\rvert = \lvert A\rvert^k \cdot \lvert y_0 - y^*\rvert$ $\lvert A\rvert^k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$	y_k explosiv
$\lvert A\rvert < 1$	$\lvert y_k - y^*\rvert = \lvert A\rvert^k \cdot \lvert y_0 - y^*\rvert$ $\lvert A\rvert^k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$	y_k gedämpft $\lim_{k\to\infty} y_k = y^*$

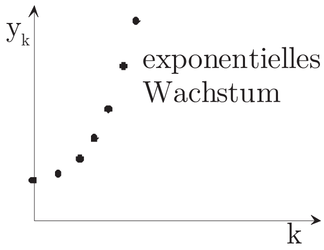
2. Im Sonderfall A = 1 gilt gemäss (2)

$$y_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} +\infty, \quad \text{falls } B > 0$$

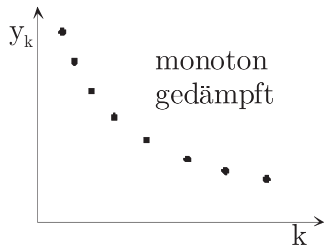
$$y_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} -\infty, \quad \text{falls } B < 0$$

Lösungsverhalten in Abhängigkeit von A:

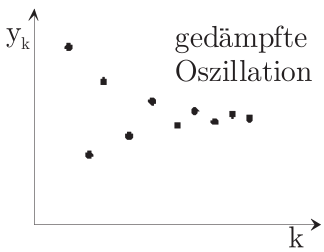
A > 1



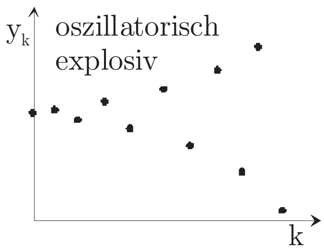
0 < A < 1



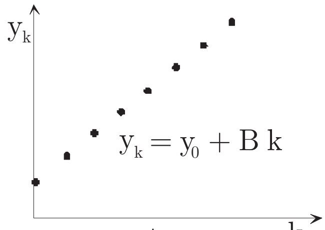
-1 < A < 0



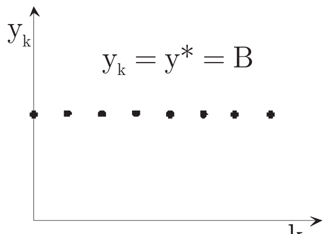
A < -1



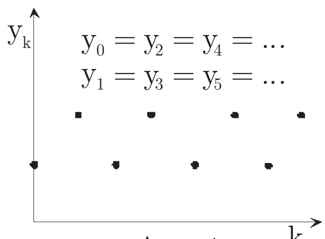
Grenzfälle:



A = 1



A = 0



A = -1

Lösungsverhalten: Zusammenstellung

$A > 0$	:	Lösung monoton
$A < 0$	:	Lösung oszillatorisch
$\lvert A\rvert < 1$	:	Lösung gedämpft, $\lim\limits_{k\to\infty} y_k = y^*$
$\lvert A\rvert > 1$	:	Lösung explosiv

Beispiel III.6

Für welche Werte von m ist die Lösung der Differenzengleichung

$2y_{k+1} - m\, y_k = 3$, wobei $m \neq 0, m \neq 2$

monoton gedämpft?

Normalform

$$y_{k+1} = \frac{m}{2}\, y_k + \frac{3}{2}$$

$$mit\ \frac{m}{2} = A$$

Lösung monoton gedämpft, falls

$$0 < \frac{m}{2} < 1\ ,\ \text{d.h.}\ 0 < m < 2$$

Beispiel III.7

In einem (a,b)-Koordinatensystem stelle man alle (a,b)-Kombinationen graphisch dar, für welche die Lösung der Differenzengleichung

$$ay_{k+1} + by_k = a + b, \text{ wobei } a \neq 0,\ b \neq 0,\ a + b \neq 0$$

i) explosiv, monoton,

ii) eine gedämpfte Oszillation ist.

Normalform

$$y_{k+1} = -\frac{b}{a} y_k + 1 + \frac{b}{a}$$

$$\textit{mit } -\frac{b}{a} = A\,, \quad 1 + \frac{b}{a} = B;$$

$$y^* = \frac{B}{1-A} = \frac{1+\frac{b}{a}}{1+\frac{b}{a}} = 1$$

Lösung:

$$y_k = \left(-\frac{b}{a}\right)^k (y_0 - 1) + 1$$

i) Die Lösung ist explosiv monoton, falls

$$-\frac{b}{a} > 1$$

1. Fall	$a > 0$	$-b > a$
		$b < -a$
2. Fall	$a < 0$	$-b < a$
		$b > -a$

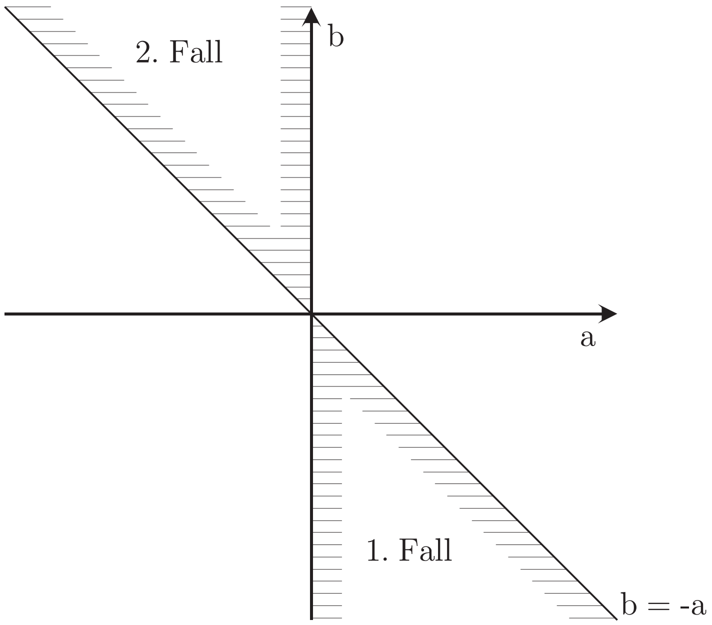
ii) Die Lösung ist eine gedämpfte Oszillation, falls

$$-1 < -\frac{b}{a} < 0$$

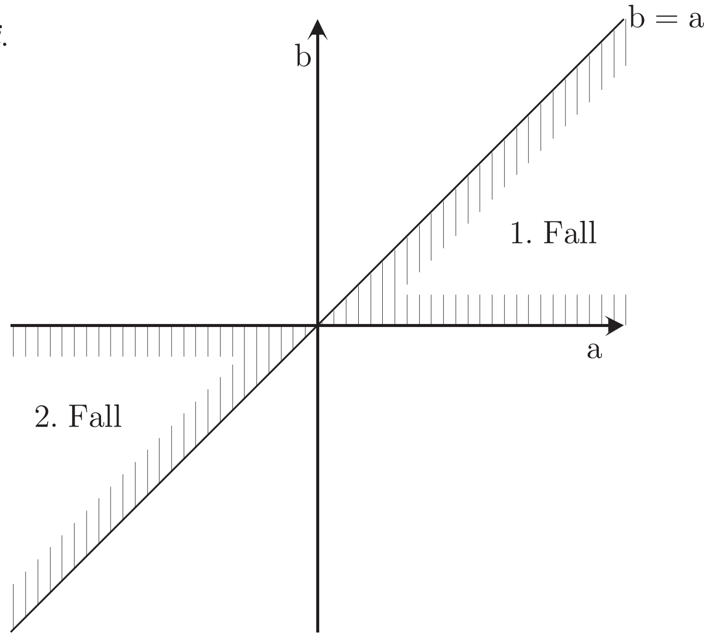
1. Fall	$a > 0$	$-a < -b < 0$
		$a > b > 0$
2. Fall	$a < 0$	$-a > -b > 0$
		$a < b < 0$

***Graphisch*:**

i.



ii.



Ökonomische Anwendungen:

1. Entwicklung eines Realvermögens

Es bezeichne

V_t : Realvermögen am Ende des Jahres t, wobei t = 0, 1, 2, . . .

i : Nominalzins

π : Inflationsrate

C : realer Konsum (erfolgt zu Jahresbeginn)

Es gilt

$$V_{t+1} = \frac{1+i}{1+\pi} \cdot \left(V_t - C\right) \quad , t = 0,1,2,\ldots$$

Da

$$A = \frac{1+i}{1+\pi} \quad , \quad B = -\frac{1+i}{1+\pi} \cdot C$$

ist

$$V^* = \frac{B}{1-A} = \frac{-\frac{1+i}{1+\pi} \cdot C}{1-\frac{1+i}{1+\pi}} = \frac{1+i}{i-\pi} \cdot C$$

$$V_t = \left(\frac{1+i}{1+\pi}\right)^t \left(V_0 - \frac{1+i}{i-\pi} \cdot C\right) + \frac{1+i}{i-\pi} \cdot C$$

Beispiel III.8

Wieviele Jahre lässt sich mit einem Realvermögen von V_0 *= 1'000'000 Fr. ein jährlicher Realkonsum von C = 50'000 Fr. garantieren, bei einem Nominalzins i = 4.5% und einer Inflationsrate π = 2%.*

$$\frac{1+i}{1+\pi} = \frac{1.045}{1.02} = 1.0245$$

$$\frac{1+i}{i-\pi} \cdot C = \frac{1.045}{0.025} \cdot 50'000 = 2'090'000$$

$$V_t = 1.0245^t \left(1'000'000 - 2'090'000\right) + 2'090'000 \geq 0$$

$$2'090'000 \geq 1.0245^t \cdot 1'090'000$$

$$\frac{2'090'000}{1'090'000} \geq 1.0245^t$$

$$t \cdot \ln 1.0245 \leq \ln\left(\frac{2'090'000}{1'090'000}\right)$$

$$\Rightarrow \quad t \leq 26.895$$

Der Konsum ist für 26 Jahre gesichert.

2. "Spinnweb-Zyklus"

Es bezeichne:

$$\left.\begin{array}{lcc} D_t & : & \text{Nachfrage} \\ S_t & : & \text{Angebot} \\ p_t & : & \text{Preis pro Mengeneinheit} \end{array}\right\} \text{zur Zeit t für ein gesisses Gut}$$

$t = 0, 1, 2, \ldots$

Modellgleichungen:

$D_t = f(p_t)$: Die Nachfrage ist eine Funktion des Preises derselben Periode.

$S_{t+1} = g(p_t)$: Das Angebot ist eine Funktion des Preises der Vorperiode.

Preisbildung:

$$S_{t+1} = D_{t+1}$$

$$g(p_t) = f(p_{t+1}) \quad \Rightarrow \quad p_{t+1}$$

Konkret wollen wir ein **lineares Modell** verwenden:

a. $D_t = f(p_t) = -ap_t + b \qquad a, b > 0$

b. $S_{t+1} = g(p_t) = cp_t - d \qquad c, d > 0$; p_0 sei vorgegeben

c. Preisbildung: $S_{t+1} = D_{t+1}$

Aus a., b. und c. folgt

$$cp_t - d = -ap_{t+1} + b, \quad \text{d.h.} \quad p_{t+1} = Ap_t + B,$$

Normalform

$$p_{t+1} = -\frac{c}{a}p_t + \frac{b+d}{a}$$

Anwendung von Formel (3) mit $A = -\frac{c}{a}$, $B = \frac{b+d}{a}$ ergibt

$$p_t = \left(-\frac{c}{a}\right)^t (p_0 - p^*) + p^*,$$

$$\text{mit} \quad p^* = \frac{B}{1-A} = \frac{\frac{b+d}{a}}{1+\frac{c}{a}} = \frac{b+d}{a+c}$$

Bemerkung: p^* stellt den langfristigen Gleichgewichtspreis dar, denn es gilt

$$g(p^*) = f(p^*)$$

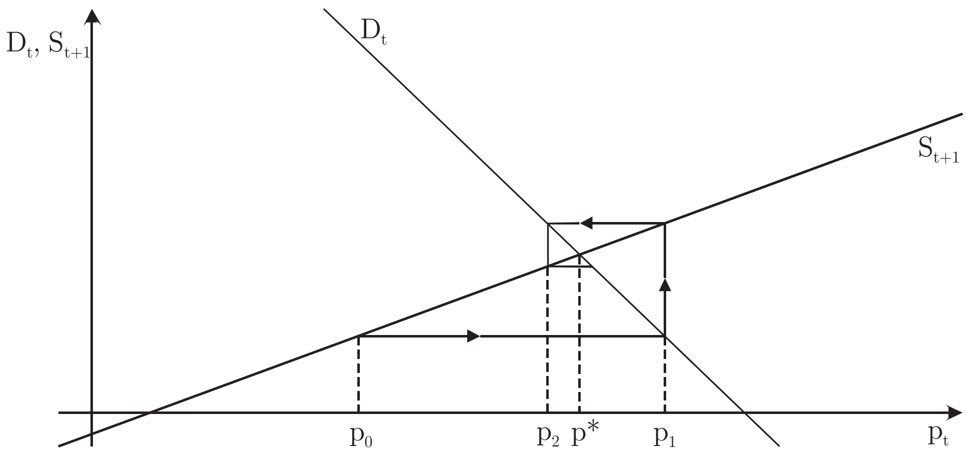
Drei mögliche Fälle

i. $|A| = \left|-\frac{c}{a}\right| < 1$:

$$\lim_{t\to\infty} p_t = p^* = \frac{b+d}{a+c}$$

p_t konvergiert oszillatorisch.

Graphisch:

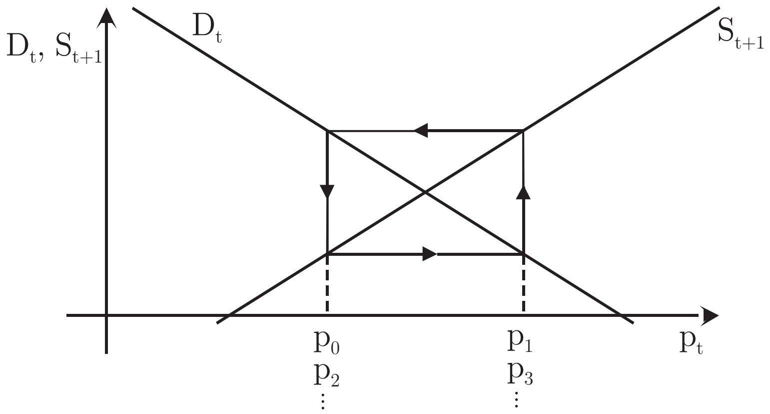


ii. $|A| = \left|-\frac{c}{a}\right| = 1$

$$p_1 = (p_0 - p^*)(-1) + p^* = 2p^* - p_0$$
$$p_2 = (p_0 - p^*)(-1)^2 + p^* = p_0$$
$$p_1 = (p_0 - p^*)(-1)^3 + p^* = p_1$$
$$p_4 = p_0 \qquad \text{usw.}$$

p_t divergiert endlich-oszillatorisch.

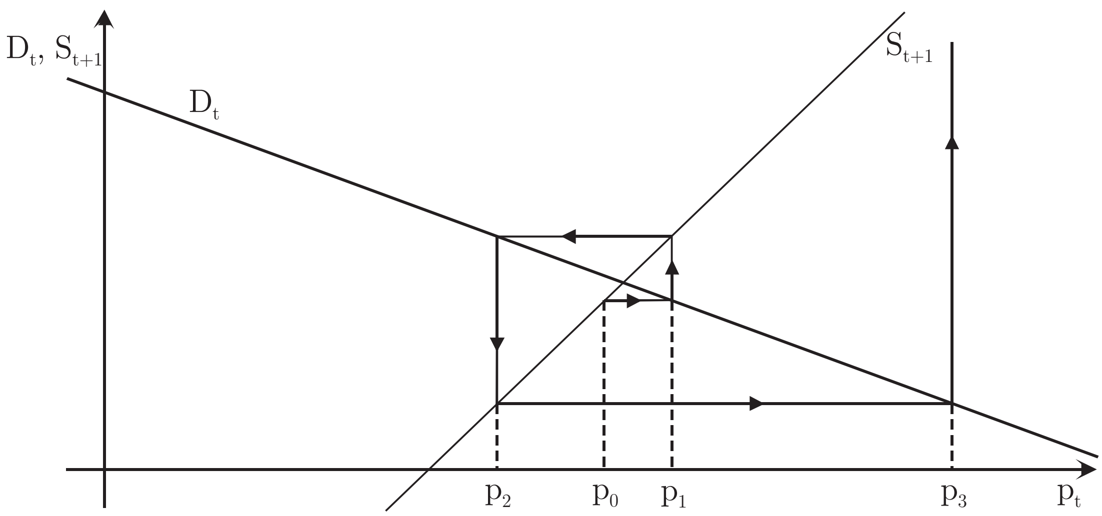
Graphisch:



iii. $|A| = \left|-\frac{c}{a}\right| > 1$

p_t divergiert unendlich oszillatorisch.

Graphisch:



3 DIE LINEARE DIFFERENZENGLEICHUNG 2. ORDNUNG (MIT KONSTANTEN KOEFFIZIENTEN)

Definition 3.1:

Eine Gleichung vom Typ

$$\text{(I) } y_{k+2} + a_1\, y_{k+1} + a_2\, y_k = 0$$

heisst **homogene,**

eine solche vom Typ

$$\text{(II) } y_{k+2} + a_1\, y_{k+1} + a_2\, y_k = r\ ;\ k = 0,1,2, \ldots$$

heisst **inhomogene lineare Differenzengleichung 2. Ordnung**

(mit konstantem Störglied r).

Bemerkung:

Zu vorgegebenen **Anfangswerten** y_0 und y_1 existiert **genau eine Lösung** einer Differenzengleichung 2. Ordnung; diese kann rekursiv gefunden werden.

Beispiel III.9

$$y_{k+2} - \frac{1}{2} y_{k+1} - \frac{1}{2} y_k = 0, \quad \textit{d.h.}$$

$$y_{k+2} = \frac{1}{2}\,(y + y_k)$$

Es sei $y_0 = 10$, $y_1 = 0$ $\quad\Rightarrow$

$y_2 = 5$, $y_3 = 2.5$, $y_4 = 3.75$, $y_5 = 3.125$, $y_6 = 3.4375, \ldots$

Beispiel III.10

$$y_{k+2} - 2y_k = 2, \quad \textit{d.h.}$$

$$y_{k+2} = 2y_k + 2$$

Es sei $y_0 = 1$, $y_1 = 3$ $\quad\Rightarrow$

$y_2 = 4$, $y_3 = 8$, $y_4 = 10$, $y_5 = 18$, $y_6 = 22, \ldots$

Erwünscht ist aber häufig Kenntnis der sogenannten **"allgemeinen Lösung"**, d.h. der Gesamtheit aller Funktionen (Folgen), welche die Differenzengleichung **identisch in k** erfüllen.

Satz: "Superpositionsprinzip"
Die **allgemeine Lösung** der **inhomogenen Gleichung** (II) ist gleich der Summe aus der allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung (I) und einer speziellen Lösung der inhomogenen Gleichung.

$y_k = c_1\, y_k^{(1)} + c_2\, y_k^{(2)}$	$+$	y_k^*
allgemeine Lösung		spezielle Lösung
der homogenen Gleichung		der inhomogenen Gleichung

Dabei stellen $y_k^{(1)}$ und $y_k{}^{(2)}$ zwei **linear unabhängige** Lösungen der homogenen Gleichung (I) dar. (Beweis weggelassen)

A. **Allgemeine Lösung der homogenen Gleichung (I)**

Gegeben: Gleichung (I) $y_{k+2} + a_1\, y_{k+1} + a_2\, y_k = 0$

Ansatz: $\mathbf{y_k = m^k}$, $\quad m \neq 0$

Einsetzen in (I) ergibt

$$m^{k+2} + a_1\, m^{k+1} + a_2\, m^k = 0 \qquad | : m^k$$

$$m^2 + a_1\, m + a_2 = 0 \qquad \text{"charakteristische Gleichung"}$$

Lösungen:

$$m_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2}$$

Eine quadratische Gleichung $m^2 + a_1 m + a_2 = 0$ kann

zwei verschiedene reelle Lösungen	(falls $a_1^2 - 4a_2 > 0$)
eine reelle Doppellösung	(falls $a_1^2 - 4a_2 = 0$)
keine reelle Lösung	(falls $a_1^2 - 4a_2 < 0$)

haben.

Jeden dieser Fälle wollen wir nun betrachten.

1. Fall $\boxed{a_1^2 - 4\,a_2 > 0}$

Die charakteristische Gleichung hat zwei verschiedene Lösungen m_1 und m_2.

$$y_k^{(1)} = m_1^k \text{ und } y_k^{(2)} = m_2^k$$

sind zwei linear unabhängige Lösungen von (I);

$$y_k = c_1 m_1^k + c_2 m_2^k\ ,\ c_1, c_2 \text{ beliebig konstant}$$

ist die **allgemeine Lösung** von (I).

Beispiel III.11

$$y_{k+2} + y_{k+1} - 2y_k = 0$$

charakteristische Gleichung:

$$m^2 + m - 2 = (m + 2)(m - 1) = 0$$

Lösungen:

$$m_1 = 1 \qquad m_2 = -2$$

allgemeine Lösung der Differenzengleichung:

$$y_k = c_1 \cdot 1^k + c_2 \cdot (-2)^k = c_1 + c_2\,(-2)^k$$

Beispiel III.12

Welche Lösung der Gleichung

$$y_{k+2} + y_{k+1} - 6y_k = 0$$

erfüllt die Anfangsbedingungen

$$y_0 = 1 \qquad y_1 = 7\ ?$$

charakteristische Gleichung:

$$m^2 + m - 6 = 0 = (m + 3)(m - 2)$$

$$m_1 = -3 \qquad m_2 = 2$$

allgemeine Lösung der Differenzengleichung:

$$y_k = c_1\,(-3)^k + c_2 \cdot 2^k\,, \qquad k = 0,1,2,\ldots$$

Anfangsbedingungen:

$y_0 = 1 = c_1 \cdot (-3)^0 + c_2 \cdot 2^0 = c_1 + c_2 \qquad | \cdot 3$

$y_1 = 7 = c_1 \cdot (-3)^1 + c_2 \cdot 2^1 = -3c_1 + 2c_2$

$$\begin{array}{lcl} 3 = 3c_1 & + & 3c_2 \\ 7 = -3c_1 & + & 2c_2 \\ \hline 10 = & & 5c_2 \\ \underline{c_1 = -1} & & \underline{c_2 = 2} \end{array}$$

Die Lösung des Anfangswert-Problems ist:

$$y_k = -(-3)^k + 2 \cdot 2^k = 2^{\mathbf{k+1}} - (-3)^{\mathbf{k}}$$

2. Fall $\boxed{a_1^2 - 4a_2 = 0}$

Die Lösungen der charakteristischen Gleichung fallen zusammen:

$$m_1 = m_2 = m = -\frac{a_1}{2} \qquad \text{ist die (einzige) Lösung.}$$

$y_k^{(1)} = m^k$ ist eine Lösung der Differenzengleichung (I). Gesucht ist eine weitere, davon linear unabhängige Lösung.

Behauptung:

Auch $y_k^{(2)} = k\,m^k$ ist Lösung der Differenzengleichung (I).

Nachweis:

Durch Einsetzen in (I) finden wir:

$$(k+2)m^{k+2} + a_1(k+1)m^{k+1} + a_2 k\,m^k$$
$$= k \cdot m^k\,(m^2 + a_1 m + a_2) + m^{k+1}\,(2m + a_1) = 0 \quad \text{mit}$$

$$(m^2 + a_1 m + a_2) = 0, \quad \text{da m Lösung der charakteristischen Gleichung}$$
$$(2m + a_1) = 0, \quad \text{da } m = -\frac{a_1}{2}$$

Somit gilt: Im 2. Fall ist die allgemeine Lösung

$$y_k = (c_1 + c_2\, k) \cdot m^k \,; \qquad c_1, c_2 \text{ bel. konstant}$$

Beispiel III.13

$$4y_{k+2} + 4y_{k+1} + y_k = 0$$

charakteristische Gleichung:

$$4m^2 + 4m + 1 = (2m + 1)^2 = 0$$

Lösung:

$$m_1 = m_2 = m = -\frac{1}{2}$$

allgemeine Lösung der Differenzengleichung:

$$y_k = (c_1 + c_2\, k) \left(-\frac{1}{2}\right)^k$$

Zusatzfrage: Welche Lösung erfüllt die Anfangsbedingungen

$y_0 = 1 \qquad y_1 = 0?$

$$y_0 = 1 = (c_1 + c_2 \cdot 0) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^0 = c_1$$
$$y_1 = 0 = (c_1 + c_2 \cdot 1) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^1 = (c_1 + c_2) \left(-\frac{1}{2}\right)$$
$$c_1 = 1 \qquad c_2 = -1$$

$$y_k = (1 - k) \left(-\frac{1}{2}\right)^k$$

3. Fall $\boxed{a_1^2 - 4\, a_2 < 0}$

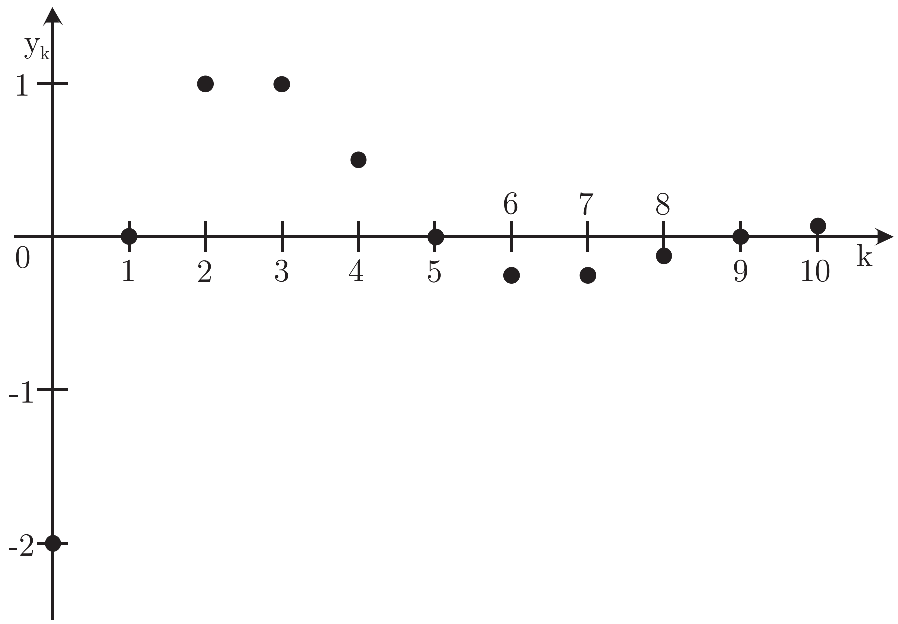
Die charakteristische Gleichung hat keine reellen Lösungen.

Beispiel III.14

$$y_{k+2} - y_{k+1} + 0.5 y_k = 0$$

Anfangswerte: $y_0 = -2$ $\qquad$ $y_1 = 0$

Einige rekursiv errechnete Werte sind im folgenden graphisch dargestellt:



Mit Hilfe der komplexen Zahlen lässt sich folgendes Resultat herleiten (vgl. Anhang B):

Satz:

Ist $a_1^2 - 4a_2 < 0$, so ist die allgemeine Lösung von (I)

$$y_k = R^k \, (c_1 \sin(k\varphi) + c_2 \cos(k\varphi)) \quad , \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

wobei

$$R = \sqrt{a_2}$$

$$\cos \varphi = -\frac{a_1}{2\sqrt{a_2}} \quad , \quad 0 \leq \varphi < \pi$$

Beispiel III.15

$$y_{k+2} - y_{k+1} + 0.5 y_k = 0$$

$$a_1^2 - 4a_2 = 1 - 2 = -1 < 0$$

Somit liegt der 3. Fall vor, und man erhält

$$R = \sqrt{0.5} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos\varphi = \frac{1}{2\sqrt{0.5}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4}$$

Die allgemeine Lösung lautet:

$$y_k = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^k \left(c_1 \sin\left(k \cdot \frac{\pi}{4}\right) + c_2 \cos\left(k \cdot \frac{\pi}{4}\right)\right), \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Welche Lösung erfüllt die Anfangsbedingungen

$$y_0 = -2 \ , \ y_1 = 0?$$

$$y_0 = -2 = \left(\sqrt{\frac{2}{2}}\right)^0 \left(c_1 \sin\left(0 \cdot \frac{\pi}{4}\right) + c_2 \cos\left(0 \cdot \frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$= 1(c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 1) = c_2$$

$$y_1 = 0 = \sqrt{\frac{2}{2}} \left(c_1 \sin\frac{\pi}{4} + c_2 \cos\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \sqrt{\frac{2}{2}} \left(c_1 \cdot \sqrt{\frac{2}{2}} + c_2 \cdot \sqrt{\frac{2}{2}}\right) \Rightarrow c_1 + c_2 = 0$$

***Lösung**:*

$$y_k = \left(\sqrt{\frac{2}{2}}\right)^k \left(2 \sin\left(k \cdot \frac{\pi}{4}\right) - 2 \cos\left(k \cdot \frac{\pi}{4}\right)\right), \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Zusammenstellung

Differenzengleichung	$y_{k+2} + a_1 y_{k+1} + a_2 y_k = 0$
charakteristische Gleichung	$m^2 + a_1 m + a_2 = 0$ (*)

Fall:	**Lösung:**
$a_1^2 - 4a_2 > 0$	$\boxed{y_k = c_1 m_1^k + c_2 m_2^k}$ m_1, m_2 sind Lösungen von (*)
$a_1^2 - 4a_2 = 0$	$\boxed{y_k = (c_1 + kc_2)m^k}$ m ist die einzige Lösung von (*)
$a_1^2 - 4a_2 < 0$	$\boxed{y_k = R^k(c_1\sin(k\varphi) + c_2\cos(k\varphi))}$

wobei $R = \sqrt{a_2}$

$$\cos\varphi = -\frac{a_1}{2\sqrt{a_2}}, \qquad 0 \leq \varphi < \pi$$

B. **Partikuläre oder spezielle Lösung y* der inhomogenen Gleichung**

(II) $\quad y_{k+2} + a_1 y_{k+1} + a_2 y_k = r$

1. **Normalfall:** $\boxed{1 + a_1 + a_2 \neq 0}$

   $\mathbf{y_k^* = c =}$ **konstant** ist eine spezielle Lösung der Gleichung

   (II) $\quad y_{k+2} + a_1 y_{k+1} + a_2 y_k = r$

   Durch Einsetzen folgt

   $$c + a_1 c + a_2 c = r,$$

   und somit

   $$c = \frac{r}{1 + a_1 + a_2}.$$

2. **Spezialfälle:** $\boxed{1 + a_1 + a_2 = 0}$

   Falls $1 + a_1 + a_2 = 0$, so ist $y_k^* = k \cdot c$ eine spezielle Lösung von (II). Und zwar folgt durch Einsetzen:

   $$(k + 2) \cdot c + a_1(k + 1) \cdot c + a_2 kc = r$$
   $$c \cdot \underbrace{k(1 + a_1 + a_2)}_{0} + (2 + a_1) \cdot c = r$$
   $$c = \frac{r}{2 + a_1}, \qquad a_1 \neq -2$$

   Sonderfall: $\quad 1 + a_1 + a_2 = 0, \qquad a_1 = -2$

   Die einzige Diffenrenzengleichung (II), die diese Bedingung erfüllt, ist

   $$y_{k+2} - 2y_{k+1} + y_k = r$$

   Eine Partikulärlösung dieser Gleichung ist

   $$y_k^* = \frac{r}{2} \cdot k^2 \qquad \text{(Nachweis?)}$$

Beispiel III.16

Gesucht ist die Lösung der Differenzengleichung $y_{k+2} - 4y_k = 6$, welche die Anfangsbedingungen $y_0 = 0$, $y_1 = 2$ erfüllt.

a. zugehörige homogene Gleichung:

$$y_{k+2} - 4y_k = 0$$

charakteristische Gleichung:

$$m^2 - 4 = (m - 2)(m + 2) = 0$$

Lösungen: $m_1 = 2, \quad m_1 = -2$

allgemeine Lösungen der homogenen Gleichung:

$$y_k^{(H)} = c_1 \cdot 2^k + c_2(-2)^k$$

b. Spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung:

$$y_k^* = c$$

$$c - 4c = 6 \qquad\qquad c = -2$$

allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung:

$$y_k = c_1 \cdot 2^k + c_2(-2)^k - 2, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

c. Anfangsbedingungen:

$$y_0 = 0 = c_1 + c_2 - 2 \implies c_1 + c_2 = 2$$

$$y_1 = 2 = 2c_1 - 2c_2 - 2 \implies c_1 - c_2 = 2$$

$$c_1 = 2 \qquad c_2 = 0$$

Lösung: $\quad y_k = 2 \cdot 2^k - 2 = 2^{k+1} - 2$

Bemerkungen zur Stabilität der Lösungen von Differenzengleichungen 2. Ordnung

$$y_{k+2} + a_1 y_{k+1} + a_2 y_k = r, \qquad r = \text{konstant} \qquad (1 + a_1 + a_2 \neq 0)$$

Es sei y_k die allgemeine Lösung dieser Gleichung.

Definition:

Wenn

$$\lim_{k\to\infty} y_k = y^* ,$$

unabhängig von den Anfangswerten y_0 und y_1, so heisst die Lösung **stabil**.

Gesucht:

Bedingungen, welche Stabilität garantieren.

Eine notwendige und hinreichende Bedingungen für

$$\lim_{k\to\infty} y_k = y^*$$

ist:

$$\lim_{k\to\infty} y_k^{(H)} = 0 \qquad (y_k^{(H)} = \text{Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung})$$

Dies bedeutet im

1. Fall: $|m_1| < 1, \quad |m_2| < 1$
2. Fall: $|m| < 1$
3. Fall: $R < 1$

Wünschenswert wären Bedingungen, die direkt auf die **Differenzengleichung** zurückgehen, und nicht schon deren Lösung voraussetzen.
Solche Bedingungen lassen sich tatsächlich formulieren; sie sind im folgenden Satz festgehalten. (ohne Beweis)

Satz:
Die Lösung der Differenzengleichung

$$y_{k+2} + a_1 y_{k+1} + a_2 y_k = r$$

ist genau dann stabil, wenn die folgenden Ungleichungen

$$\left.\begin{array}{l} 1 + a_1 + a_2 > 0 \\ \\ 1 - a_1 + a_2 > 0 \\ \\ 1 \qquad\;\; - a_2 > 0 \end{array}\right\} \text{ simultan erfüllt sind.}$$

Beispiel III.17

Für welche Werte von a ist die Lösung der Diffenrenzengleichung

$$y_{k+2} - y_{k+1} + a y_k = 2$$

stabil?

Bedingungen:

$1 - 1 + a > 0 \qquad a > 0$

$1 + 1 + a > 0 \qquad a > -2$

$1 \quad -a > 0 \qquad 1 > a$

Diese Lösung ist stabil für $\quad 0 < a < 1.$

4 ÖKONOMISCHE ANWENDUNGEN

Das Multiplikator-Akzelerator-Modell von Samuelson

Es bezeichne

$$\left.\begin{array}{lll} Y_t & : & \text{Volkseinkommen} \\ C_t & : & \text{Konsum} \\ I_t & : & \text{Investition} \\ G_t & : & \text{Staatsausgaben} \end{array}\right\} \quad \text{in der Periode t}$$

Modellannahmen: t diskret

(A) $Y_t = C_t + I_t + G_t$

(B) $C_t = \alpha Y_{t-1}$; $0 < \alpha < 1$

(C) $I_t = \beta (Y_{t-1} - Y_{t-2})$

(D) $G_t =$ konstant (=1)

Setzt man (B), (C), (D) in (A) ein, so erhält man

$$Y_t = \alpha Y_{t-1} + (Y_{t-1} - Y_{t-2}) + 1$$

d.h. $Y_\mathbf{t} - (\alpha+\beta) Y_{\mathbf{t-1}} + \beta Y_{\mathbf{t-2}} = 1$

$Y^* = \dfrac{1}{1-(\alpha+\beta)+\beta} = \dfrac{1}{1-\alpha}$ ist Partikularlösung der Differenzengleichung

Frage: Für welche Werte α, β ist die Lösung

i. stabil?

ii. oszillatorisch? (trigonometrisch)

i. Die Lösung ist stabil

$\Leftrightarrow$

a. $1 + a_1 + a_2 = a - (\alpha+\beta) + \beta = 1 - \alpha > 0$

b. $1 - a_1 + a_2 = 1 + \alpha + \beta + \beta > 0$

c. $1 \quad - a_2 = 1 - \beta > 0$

Die Ungleichung a. ist - wegen der Modell-Annahme $0 < \alpha < 1$ - erfüllt.

b. ist erfüllt, da α, $\beta > 0$.

Aus c. folgt: Lösung stabil $\Leftrightarrow \beta < 1$.

Ergebnis: Für $\beta < 1$ konvergiert Y_t gegen

$$Y^* = \frac{1}{1-\alpha}$$

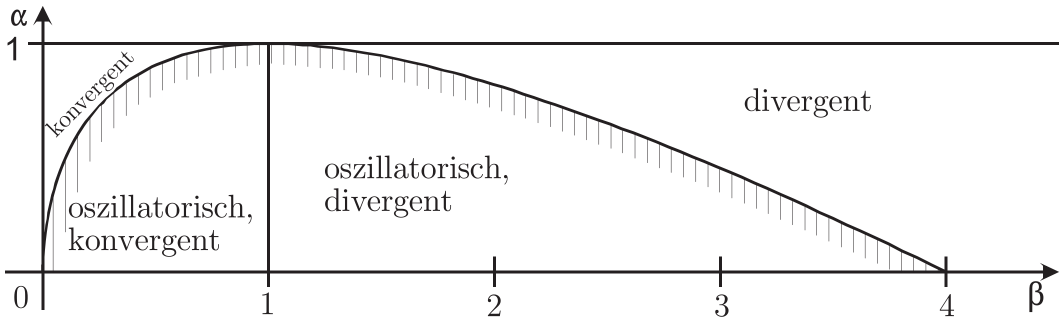
ii. Die Lösung ist oszillatorisch, falls

$$a_1^2 - 4a_2 = (\alpha + \beta) - 4\beta < 0$$

$$\alpha + \beta < 2\sqrt{\beta}$$

$$\alpha < 2\sqrt{\beta} - \beta$$

Graphische Illustration:



Beispiel III.18

$\alpha = 0.8$ $\beta = 3$

$$Y_t - 3.80Y_{t-1} + 3Y_{t-2} = 1$$

Lösung:

$$Y_t = c_1 \cdot 2.68^t + c_2\ 1.12^t + 5$$

(Nachweis)?

Beispiel III.19

$\alpha = 0.9$ $\beta = 0.7$

$$Y_t - 1.6Y_{t-1} + 0.7Y_{t-2} = 1$$

Lösung:

$$Y_t = (0.837)^t\,[c_1 \sin(0.297\ t) + c_2 \cos(0.297\ t)] + 10$$

(Beachte: Die Winkel werden im Bogenmass ausgedrückt)

5 AUFGABEN

1. *Lösen Sie die folgenden Differenzengleichungen:*

   a. $y_t + 2y_{t-1} - 15y_{t-2} = 4$ *mit* $y_0 = 0$, $y_1 = 2$

   b. $y_{t+2} + 10y_{t+1} + 25y_t = 10$ *mit* $y_0 = 1$, $y_1 = 4$

   c. $y_{k+2} - y_{k+1} + y_k = 2$ *(nur die allgemeine Lösung)*

2. *Gegeben ist die folgende Differenzengleichung:*

$$y_{k+2} = ay_{k+1} - y_k$$

   a. *Für welche Werte von a ist die Lösung*

      a1. *stabil?*

      a2. *trigonometrisch?*

   b. *Lösen Sie die Diffenrenzengleichung für* $a = 2$, *mit den Anfangsbedingungen* $y_0 = 2$ *und* $y_1 = 1$.

3. a. *Für welche Werte p ist die Lösung der Diffenrenzengleichung* $y_{k+2} - y_{k+1} + py_k = 6$ *stabil?*

   b. *Man bestimme die allgemeine Lösung für* $p = 1/4$.

4. a. *Für welche Werte von a ist die Lösung der Differenzengleichung* $y_k + 2y_{k-1} + ay_{k-2} = 0$

      a1. *trigonometrisch?*

      a2. *stabil?*

   b. *Gesucht ist die Lösung für* $a = 3$, $y_0 = 1$, $y_1 = 0$.

5. *Gegeben ist die folgende Differenzengleichung:*

$$y_t = py_{t-1} + (1 - p)y_{t-2}; \qquad 0 < p < 1$$

   a. *Erklären Sie das Bildungsgesetz verbal.*

   b. *Gesucht ist die allgemeine Lösung der Differenzengleichung.* *Wie verhält sich die Lösung für* $t \to \infty$?

   c. *Lösen Sie die Differenzengleichung für* $p = 1/3$, $y_0 = 10$, $y_1 = 0$. *Wie gross ist* $\lim_{t\to\infty} y_t = ?$

6. *Gegeben ist die folgende Differenzengleichung:*

$$ay_{t+2} + by_{t+1} - (1 + a)y_t = b.$$

a. *Man löse die Differenzengleichung für $a = 1$, $b = 2$*

a1. *allgemein.*

a2. *unter Verwendung der Anfangsbedingungen $y_0 = 3$, $y_1 = 2$.*

b. *Lösen Sie die Differenzengleichung für $b = 0$, $a \neq 0$.*

c. *Lösen Sie die Differenzengleichung für $a = 0$, $b \neq 1$, und diskutieren Sie das Verhalten der Lösung in Abhängigkeit von b.*

Lösungen

1. a. $y_t = \frac{1}{2} \cdot 3^t - \frac{1}{6} \cdot (-5)^t - \frac{1}{3}$

   b. $y_t = \left(\frac{13}{18} - \frac{22}{15}\ t\right)(-5)^t + \frac{5}{18}$

   c. $y_k = c_1 \cdot \sin(k \cdot \frac{\pi}{3}) + c_2 \cdot \cos\left(\mathrm{k} \cdot \frac{\pi}{3}\right) + 2$

2. a1. *nicht stabil*

   a2. *trigonometrisch für -2 < a < 2*

   b. $y_k = 2 - k$

3. a. *stabil für* $0 < p < 1$

   b. $y_k = (c_1 + c_2 \cdot k) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k + 24$

4. a1. *trigonometrisch für a > 1*

   a2. *nicht stabil*

   b. $y_k = 1.73^k \left(0.71 \sin\left(k \cdot 2.1862\right) + \cos\left(k \cdot 2.1862\right)\right)$

5. a. y_t *ist der gewichtete Durchschnitt der Werte der beiden Vorperioden.*

   b. $y_t = c_1 \cdot (p-1)^t + c_2$

   $\lim_{t\to\infty} y_t = c_2$

   c. $y_t = 6 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^t + 4$

   $\lim_{t\to\infty} y_t = 4$

6. a1. $y_t = c_1\left(-1+\sqrt{3}\right)^t + c_2\left(-1-\sqrt{3}\right)^t + 2$

   a2. $y_t = 0.79(0.73)^t + 0.21(-2.73)^t + 2$

   b. $y_t = c_1\left(\sqrt{\frac{1+\mathrm{a}}{\mathrm{a}}}\right)^t + c_2\left(-\sqrt{\frac{1+\mathrm{a}}{\mathrm{a}}}\right)^t$ *für a < -1 oder a > 0*

   c. $y_t = \left(\frac{1}{\mathrm{b}}\right)^t \left(\mathrm{y}_0 - \frac{\mathrm{b}}{\mathrm{b}-1}\right) + \frac{\mathrm{b}}{\mathrm{b}-1}$

   Lösung monoton, falls b > 0; *Lösung konvergent, falls* $|\mathrm{b}| > 1$.

IV ANHANG A: DER SIMPLEX-ALGORITHMUS

1 EINLEITUNG

Die lineare Optimierung befasst sich mit dem Auffinden eines Maximums (Minimums) einer **linearen Funktion**

(1) $\quad Z = f(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n) = p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_nx_n$

unter **Nebenbedingungen**, die die Form von **linearen Ungleichungen** annehmen:

$$
(2) \quad
\begin{array}{l}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \leq b_1 \quad (\geq b_1) \\
\\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \leq b_2 \quad (\geq b_2) \\
\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \leq b_m \quad (\geq b_m)
\end{array}
$$

Ferner sollen die **Nicht-Negativitätsbedingungen**

(3) $\quad x_i \geq 0 \quad , i = 1, 2, \ldots n$

gelten.

In Matrix-Schreibweise kann das Problem wie folgt dargestellt werden:

Es bezeichne:

$$
A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ . & & \\ . & & \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}
\qquad
\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}
\qquad
\mathbf{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ . \\ . \\ p_n \end{pmatrix}
\qquad
\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ . \\ . \\ b_m \end{pmatrix}
$$

Zielfunktion:

$$Z = f(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^{\mathbf{T}}\mathbf{x} \quad \rightarrow \quad \text{Max (Min)}$$

Nebenbedingungen:

$$A\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \quad (\geq \ \mathbf{b})$$

Nicht-Negativitätsbedingungen:

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

Beispiel IV.1 (Einführung)

(1) $Z = f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1 + x_2 + 3x_3 \quad \rightarrow \quad Max,$

wobei

$$(2) \qquad \begin{array}{llll} x_1 & & & \leq 2 \\ & x_2 & & \leq 5 \\ x_1 & & + x_3 & \leq 3 \\ & x_2 & +5x_3 & \leq 10 \end{array}$$

$$(3) \qquad x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

In Band I, S. 226 ff., haben wir eine **graphische** Methode kennengelernt, um entsprechende Probleme im Falle zweier Variablen x_1, x_2 zu lösen.
Die graphische Methode lässt sich nur beschränkt auf den Fall von 3 Variablen und nicht auf den Fall von mehr als 3 Variablen übertragen. Dennoch lassen die dort erarbeiteten Ideen gewisse Analogien zu.

1. Überlegung: Gebiet der zulässigen Lösungen.

Jede Gleichung

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = b_i\,, \qquad i = 1, \ldots. m$$

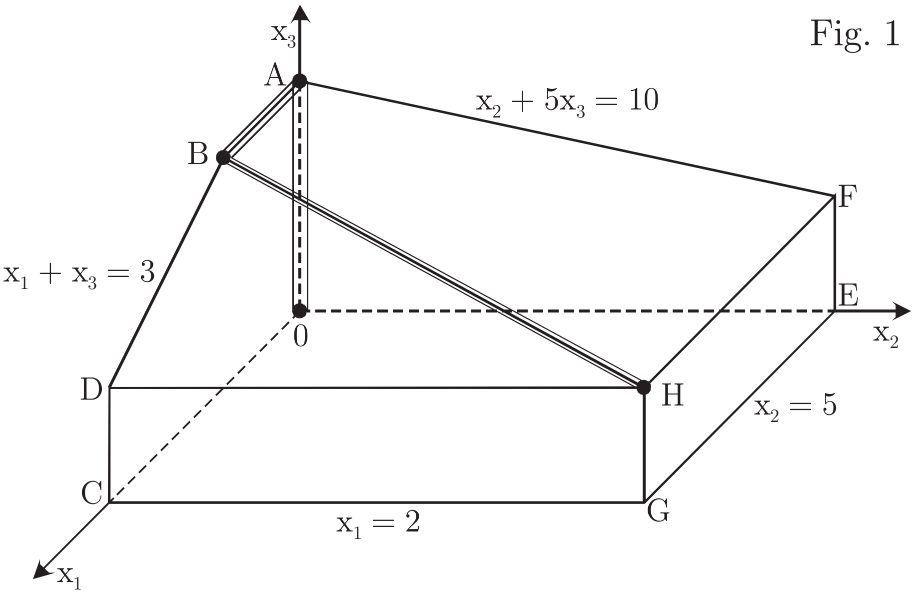
respektive $\quad x_j = 0\,, j = 1, \ldots., n$

stellt eine “Hyperebene” im Raum $\mathbb{R}^n$ dar (für n = 3: eine Ebene in $\mathbb{R}^3$); die Ungleichung

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots. + a_{in}x_n \leq b_i \text{ respektive } \quad x_j \geq 0$$

beschreibt einen durch die entsprechende Hyperebene begrenzten Halbraum.
Alle Bedingungen (2) und (3) zusammen grenzen eine konvexe, durch Hyperebenen begrenzte Menge in $\mathbb{R}^n$ ab. Eine solche Menge nennt man **Simplex**.

Im Beispiel IV.1:



2. Überlegung:

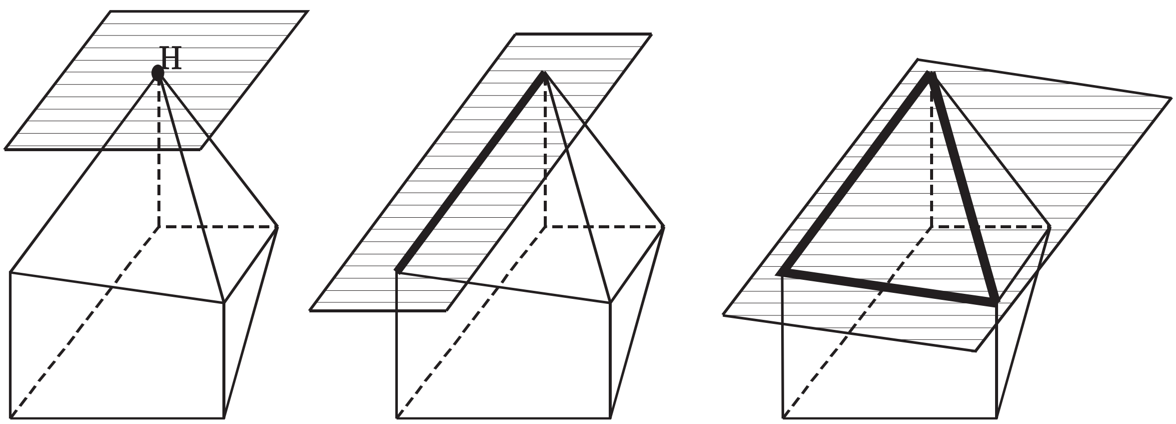
Flächen mit der Gleichung

$$f(x_1, \ldots, x_n) = p_1x_1 + \cdots + p_nx_n = k = \text{konst.}$$

stellen eine Schar paralleler Hyperebenen dar.

Es ist unmittelbar evident, dass die Funktion $Z = f(x_1, \ldots, x_n)$ ihr Maximum dort annimmt, wo eine der Hyperebenen aus der Schar auf der Begrenzungsfläche des Gebietes der zulässigen Lösungen aufliegt (in einem Punkt, einer Strecke, einer Fläche, bzw. einer Hyperfläche).

Illustration:



Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir uns bei der Suche nach “Kandidaten” für das Maximum auf die **Eckpunkte** (Vertices) der zulässigen Lösungsmenge beschränken.

Im Beispiel IV.1:

Vertex	(x_1, x_2, x_3)	Wert der Zielfunktion $2x_1 + x_2 + 3x_3$
0	(0, 0, 0)	0
A	(0, 0, 2)	6
B	(1, 0, 2)	8
C	(2, 0, 0)	4
D	(2, 0, 1)	7
E	(0, 5, 0)	5
F	(0, 5, 1)	8
G	(2, 5, 0)	9
H	(2, 5, 1)	12 $\leftarrow$ Maximum

Der Simplex-Algorithmus kürzt nun das Verfahren insofern ab, als nicht alle Vertices betrachtet werden müssen, sondern nur ein Teil: Man startet von einem beliebigen Vertex und geht in Richtung steigender Zielfunktion weiter, bis kein Zuwachs mehr möglich ist.

Im Beispiel: $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow H$ (siehe Abbildung)

Im folgenden Abschnitt wollen wir die praktische Durchführung dieses Algorithmus kennenlernen.

2 HERLEITUNG DES SIMPLEX-ALGORITHMUS

Es ist einfacher, mit **Gleichungen** anstatt **Ungleichungen** zu arbeiten. Wir können diese Vereinfachung erreichen durch Einführung sogenannter **Schlupfvariablen**.

Im Beispiel IV.1:

$$(2)\quad \left\{\begin{array}{rrrcl} x_1 & & & \leq & 2 \\ & x_2 & & \leq & 5 \\ x_1+ & & x_3 & \leq & 3 \\ & x_2+ & 5\,x_3 & \leq & 10 \end{array}\right. \quad \begin{array}{c} \Longleftrightarrow \\ \Longleftrightarrow \\ \Longleftrightarrow \\ \Longleftrightarrow \end{array} \quad \left.\begin{array}{rrrrrrrcl} x_1+ & & & s_1 & & & & = & 2 \\ & x_2+ & & & s_2 & & & = & 5 \\ x_1+ & & x_3+ & & & s_3 & & = & 3 \\ & x_2+ & 5\,x_3+ & & & & s_4 & = & 10 \end{array}\right\}$$

wobei

$$(4)\qquad s_1 \geq 0\,,\ s_2 \geq 0\,,\ s_3 \geq 0\,,\ s_4 \geq 0$$

Allgemein betrachtet man m **nicht-negative Schlupfvariablen** $s_1, s_2, \ldots, s_m$ (je eine pro Ungleichung).

Das Problem lautet jetzt:

$$Z = f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1 + x_2 + 3x_3$$

ist zu **maximieren** unter den Bedingungen (2) und (4), respektive, in vektorieller Schreibweise,

$$(5)\qquad \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix} x_2 + \begin{pmatrix}0\\0\\1\\5\end{pmatrix} x_3 + \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} s_1 + \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} s_2$$

$$+ \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} s_3 + \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} s_4 = \begin{pmatrix}2\\5\\3\\10\end{pmatrix}$$

wobei

$$(6)\qquad x_1,\ x_2,\ x_3,\ s_1,\ s_2,\ s_3,\ s_4 \geq 0$$

Man beachte:

Jeder Vertex kann aufgefasst werden als Schnitt von (mindestens) drei Ebenen (allgemein: von (mind.) n Hyperebenen). Jede Ebene des Simplex zeichnet sich dadurch aus, dass eine der Variablen x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3, s_4 **Null** gesetzt wird, jeder Vertex als Schnitt dreier Ebenen dadurch, dass drei der Variablen (allgemein: n der Variablen $x_1, \ldots, x_n, s_1, \ldots, s_m$) Null sind.

Allerdings liefert nicht jede Wahl von drei Variablen, die man Null setzt, auch einen Vertex.

Einschränkende Bedingungen

a. So führt z.B. die Wahl $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $s_2 = 0$ auf die Vektorgleichung

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} s_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} s_3 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} s_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \\ 10 \end{pmatrix}$$

beziehungsweise auf das (nicht-lösbare) Gleichungssystem

$$\begin{array}{llll} x_1 & + s_1 & = 2 & \\ & 0 & = 5 & \longleftrightarrow \text{ Widerspruch} \\ x_1 & + s_3 & = 3 & \\ & s_4 & = 10 & \end{array}$$

b. Eine **zulässige Lösung** zeichnet sich dadurch aus, dass alle $x_i, s_j \geq 0$ sind.

Setzt man z. B. $x_1 = 0$, $x_3 = 0$, $s_4 = 0$, so resultiert die vektorielle Gleichung

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} x_2 + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} s_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} s_2 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} s_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \\ 10 \end{pmatrix},$$

beziehungsweise das (eindeutig lösbare) Gleichungssystem

$$
\begin{aligned}
s_1 &= 2 \\
x_2 + s_2 &= 5 \\
s_3 &= 3 \\
x_2 &= 10
\end{aligned}
$$

Die Lösung $x_2 = 10$, $s_1 = 2$, $\mathbf{s_2 = -5}$, $s_3 = 3$ erfüllt aber die Nicht-Negativitätsbedingungen (6) nicht!

Der **Simplex-Algorithmus** ist nun eine schematisierte Rechenmethode, welche erlaubt, so von Vertex zu Vertex des Gebietes der zulässigen Lösungen voranzuschreiten, dass

(i) in jedem Schritt der Wert der **Zielfunktion** möglichst stark **zunimmt**,

(ii) in jedem Schritt einer der Basisvektoren von (5) gegen einen der anderen Vektoren ausgetauscht wird, und zwar so, dass die verbleibenden Vektoren **linear unabhängig** sind, also wiederum eine Basis bilden,

(iii) bei obigem Austauschprozess stets gewährleistet ist, dass die **Nicht-Negativitätsbedingungen** erfüllt sind.

Praktische Durchführung:

Die vektorielle Gleichung (5) kann schematisch wie folgt dargestellt werden:

x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	s_4	
1	0	0	1	0	0	0	2
0	1	0	0	1	0	0	5
1	0	1	0	0	1	0	3
0	1	5	0	0	0	1	10

Im **Simplex-Tableau** wird diesem Schema noch eine weitere Spalte und Zeile zugefügt, und damit die **Zielfunktion** festgehalten:

(7)

Z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	s_4	
0	1	0	0	1	0	0	0	2
0	0	1	0	0	1	0	0	5
0	1	0	1	0	0	1	0	3
0	0	1	5	0	0	0	1	10
1	-2	-1	-3	0	0	0	0	0

Interpretation der letzten Zeile:

$$1\cdot Z - 2\cdot x_1 - 1\cdot x_2 - 3\cdot x_3 + 0\cdot s_1 + 0\cdot s_2 + 0\cdot s_3 + 0\cdot s_4 = 0$$

bzw.

$$Z = 2x_1 + x_2 + 3x_3$$

1. Schritt

Eine naheliegende Wahl einer ersten Basis ist

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

d.h. die Werte x_1, x_2, x_3 werden Null gesetzt. Man findet dann

$s_1 = 2$, $s_2 = 5$, $s_3 = 3$, $s_4 = 10$; der zugehörige Wert der Zielfunktion ist Null.

Welcher Vektor (“Pivot-Spalte”) soll neu in die Basis aufgenommen werden?

x_3 tritt in der Zielfunktion mit dem grössten Koeffizienten auf; x_3 ins Spiel zu bringen, verspricht grösstmöglichen Zuwachs der Zielfunktion.

Allgemein:

Die **am stärksten negative** Zahl der letzten Zeile im Simplex-Tableau bestimmt die "Pivot-Spalte".

Welcher der ursprünglichen Basisvektoren soll eliminiert werden? Gewährleistet muss sein, dass alle Nicht-Negativitätsbedingungen erfüllt sind. Dies wird folgendermassen erreicht: Man teilt die Elemente der Spalte rechts durch die entsprechenden **positiven** Elemente der Pivot-Spalte.

Der kleinste resultierende Quotient bestimmt dabei das "Pivot-Element", im Beispiel das fett hervorgehobene und eingerahmte Element 5.

	Z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	s_4			
I	0	1	0	0	1	0	0	0	2		
II	0	0	1	0	0	1	0	0	5		
III	0	1	0	1	0	0	1	0	3	3 : 1 = 3	
IV	0	0	1	$\boxed{\mathbf{5}}$	0	0	0	1	10	10 : 5 = 2	⇐
	1	-2	-1	-3	0	0	0	0	0		
				⇑							

Nun formen wir unser Schema (Gleichungssystem) mit Hilfe des **Gauss'schen Algorithmus** so um, dass aus der Pivot-Spalte ein Einheitsvektor wird, wobei das Pivot-Element in 1, alle andern Elemente in 0 übergehen sollen.

Durchführung:

	Z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	s_4			
	0	1	0	0	1	0	0	0	2	2 : 1 = 2	
	0	0	1	*0*	0	1	0	0	5		
III - 1/5 IV	0	$\boxed{\mathbf{1}}$	-1/5	*0*	0	0	1	-1/5	1	1 : 1 = 1	⇐
1/5 IV	0	0	1/5	*1*	0	0	0	1/5	2		
V + 3/5 IV	1	-2	-2/5	*0*	0	0	0	3/5	6		
		⇑									

Beachte: Mit $x_1 = x_2 = s_4 = 0$ lässt sich aus der letzten Zeile ablesen, dass der Wert der Zielfunktion auf Z=6 zugenommen hat.

2. Schritt

Pivot-Spalte: Da -2 die am stärksten negative Zahl der letzten Zeile ist, wählt man die entsprechende x_1-Spalte als Pivot-Spalte.

Pivot-Zeile: Die "Regel des kleinsten Quotienten" ergibt für die 3. Zeile den kleinsten positiven Wert.

	Z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	s_4			
I - III	0	*0*	1/5	0	1	0	-1	1/5	1	1 : 1/5 = 5	
	0	*0*	$\boxed{\mathbf{1}}$	0	0	1	0	0	5	5 : 1 = 5	⇐
	0	*1*	-1/5	0	0	0	1	-1/5	1		
	0	*0*	1/5	1	0	0	0	1/5	2	2:1/5 = 10	
V + 2 III	1	*0*	-4/5	0	0	0	2	1/5	8		
			⇑								

Der Wert der Zielfunktion lässt sich nun (mit $x_2 = 0$, $s_3 = 0$, $s_4 = 0$) als 8 ablesen.

3. Schritt

Pivot-Spalte: Einziges negatives Element der letzten Zeile ist -4/5.

Die "Regel des kleinsten Quotienten" liefert zwei gleich grosse Quotienten. Wir wählen z.B. die 2. Zeile als Pivot-Zeile.

	Z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	s_4	
	0	0	*0*	0	1	-1/5	-1	1/5	0
	0	0	*1*	0	0	1	0	0	5
	0	1	*0*	0	0	1/5	1	-1/5	2
	0	0	*0*	1	0	-1/5	0	1/5	1
	1	0	*0*	0	0	4/5	2	1/5	12

Ergebnis: Mit $s_2 = 0$, $s_3 = 0$, $s_4 = 0$ findet man: $s_1 = 0$, $\mathbf{x_1 = 2, x_2 = 5, x_3 = 1}$ und $Z = \mathbf{f_{max} = 12}$.

Bemerkung: Wir beschränken uns hier auf den Fall einer zu maximierenden Zielfunktion. Für die nötige Adaption bei einer zu **minimierenden** Zielfunktion vergleiche man z.B. Chiang [2].

Beispiel IV.2

Gesucht ist das Maximum der Funktion $Z = 2x + 3y$, *unter den Nebenbedingung*

$$
\begin{aligned}
x + 4y &\leq 9 \\
2x + y &\leq 4 \\
x\,,\, y &= 0
\end{aligned}
$$

Wir führen die Schlupfvariablen u und v ein:

$$
\begin{aligned}
x + 4y + u &= 9 \\
2x + y + v &= 4 \\
x\,,\, y\,,\, u\,,\, v &\geq 0
\end{aligned}
$$

Simplex-Tableau: (fett hervorgehoben und eingerahmt ist jeweils das Pivot-Element)

Z	x	y	u	v			
0	1	$\boxed{\mathbf{4}}$	1	0	9	9 : 4 = 2.25	⇐
0	2	1	0	1	4	4 : 1 = 4	
1	-2	-3	0	0	0		
		⇑					

Z	x	y	u	v			
0	1/4	1	1/4	0	9/4	9/4 : 1/4 = 9	
0	$\boxed{\mathbf{7/4}}$	0	-1/4	1	7/4	7/4 : 7/4 = 1	⇐
1	-5/4	0	3/4	0	27/4		
	⇑						

Z	x	y	u	v	
0	0	1	2/7	-1/7	2
0	1	0	-1/7	4/7	1
1	0	0	4/7	5/7	8

Die letzte Zeile enthält keine negativen Koeffizienten mehr

$\Rightarrow$ *Z kann nicht mehr vergrössert werden.*

Interpretation der letzten Zeile:

$$Z + 4/7\,u + 5/7\,v = 8$$

Mit $u = 0$ $\quad v = 0:$ $\quad Z_{\text{Max}} = 8$

$x = 1$ $\quad y = 2$

(Man löse dieselbe Aufgabe auch graphisch!)

Beispiel IV.3

Gesucht ist das Maximum der Funktion

(1) $\quad Z = f(x_1, x_2, x_3) = x_1 + 2x_2 - x_3$

unter den Nebenbedingungen

(2) $\quad 2x_1 + x_2 + x_3 \leq 4$

$\quad x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 5$

(3) $\quad x_1, x_2, x_3 \geq 0$

Schlupfvariablen: $\quad s_1, s_2 \geq 0$

Nebenbedingungen (2) in Form von Gleichungen:

$$2x_1 + x_2 + x_3 + s_1 = 4$$

$$x_1 + 4x_2 + 2x_3 + s_2 = 5$$

Simplex - Tableau:

	Z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2			
I	0	2	1	1	1	0	4	4 : 1 = 4	
II	0	1	$\boxed{4}$	2	0	1	5	5 : 4 = 1.25	$\Leftarrow$
III	1	-1	-2	1	0	0	0		
			$\Uparrow$						

	Z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2			
I - 1/4 II	0	$\boxed{7/4}$	0	1/2	1	-1/4	11/4	11/4 : 7/4 = 11/7	$\Leftarrow$
1/4 II	0	1/4	1	1/2	0	1/4	5/4	5/4 : 1/4 = 5	
III + 2/4 II	1	-1/2	0	2	0	1/2	5/2		
		$\Uparrow$							

	Z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	
	0	1	0	2/7	4/7	-1/7	11/7
	0	0	1	3/7	-1/7	2/7	6/7
	1	0	0	15/7	2/7	3/7	23/7

Die letzte Zeile weist keine negativen Elemente mehr auf, d.h. Z kann nicht mehr vergrössert werden.

Lösung:

$$x_3 = 0 \qquad s_1 = 0 \qquad s_2 = 0$$
$$x_1 = 11/7 \qquad x_2 = 6/7 \qquad Z_{\max} = 23/7$$

Beispiel IV.4

Maximiere

$$Z = f(x_1, x_2, x_3) = 6x_1 + 2x_2 + 5x_3$$

unter den Nebenbedingungen

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 10$$

$$x_1 + \quad + 2x_3 \leq 8$$

$$x_1 + 2x_2 + 5x_3 \leq 19$$

$$x_2 \leq 6$$

und $x_1, x_2, x_3 \geq 0$

Schlupfvariablen: $s_1, s_2, s_3, s_4 \geq 0$

Simplex - Tableau:

	Z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	s_4			
I	0	$\boxed{2}$	3	1	1	0	0	0	10	10 : 2 = 5	⇐
II	0	1	0	2	0	1	0	0	8	8 : 1 = 8	
III	0	1	2	5	0	0	1	0	19	19 : 1 = 19	
IV	0	0	1	0	0	0	0	1	6		
	1	-6	-2	-5	0	0	0	0	0		
		⇑									

	Z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	s_4			
1/2 I	0	1	3/2	1/2	1/2	0	0	0	5	5 : 1/2 = 10	
II - 1/2 I	0	0	-3/2	$\boxed{3/2}$	-1/2	1	0	0	3	3 : 3/2 = 2	⇐
III - 1/2 I	0	0	1/2	9/2	-1/2	0	1	0	14	14 : 9/2 = 28/9	
IV	0	0	1	0	0	0	0	1	6		
	1	0	7	-2	3	0	0	0	30		
				⇑							

	Z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	s_4	
	0	1	2	0	2/3	-1/3	0	0	4
	0	0	-1	1	-1/3	2/3	0	0	2
	0	0	5	0	1	-3	1	0	5
	0	0	1	0	0	0	0	1	6
	1	0	5	0	7/3	4/3	0	0	34

Lösung:

$x_2 = 0$ $\quad s_1 = 0$ $\quad s_2 = 0$

$x_1 = 4$ $\quad x_3 = 2$ $\quad Z_{\max} = 34$

V ANHANG B: ERGÄNZUNG ZU DIFFERENZENGLEICHUNGEN 2. ORDNUNG

Herleitung im 3. Fall unter Verwendung komplexer Zahlen

Tritt für die homogene lineare Differenzengleichung 2. Ordnung

$$\text{(I)} \qquad y_{k+2} + a_1 y_{k+1} + a_2 y_k = 0$$

der 3. Fall

$$a_1^2 - 4a_2 < 0$$

auf, so folgt

$$\begin{aligned} m_{1,2} &= -\frac{a_1}{2} \pm i\,\frac{\sqrt{4a_2 - a_1^2}}{2} \\ &= u \pm iv = R(\cos\varphi \pm i \sin\varphi), \end{aligned}$$

wobei R und φ Betrag und Argument der komplexen Zahl m_1 darstellen (vgl. Band I, S. 261 ff.)

Beachtet man, dass

$$[R(\cos\varphi \pm i\sin\varphi)]^k = R^k(\cos k\varphi \pm i\sin k\varphi),$$

so lässt sich die allgemeine **komplexe** Lösung darstellen als

$$\begin{aligned} y_k &= R^k\,[\,d_1(\cos k\varphi + i\sin k\varphi) + d_2(\cos k\varphi - i\sin k\varphi)] \\ &= R^k\,[(d_1 + d_2)\cos k\varphi + i(d_1 - d_2)\sin k\varphi]\ , \end{aligned}$$

d_1 , d_2 beliebige **komplexe** Konstanten.

Im Hinblick auf ökonomische Anwendungen sind wir nur an **reellen Lösungen** interessiert.

Setzt man	$d_1 = A + i\,B$,	$d_2 = A - i\,B$,	
so ist	$d_1 + d_2 = 2A = c_1$	$i\,(d_1 - d_2) = -\,2B = c_2$,	wobei c_1, c_2 reell
und	$y_k = R^k\,(c_1 \cos k\,\varphi + c_2 \sin k\,\varphi)$, $k = 0,1,2,\ldots$		

die allgemeine (reelle) Lösung von (I).

Beispiel V.1

$$y_{k+2} + y_k = 0$$

$$m^2 + 1 = 0 \qquad m_{1,2} = \pm\, i \quad R = 1 \quad \varphi = \frac{\pi}{2}$$

allgemeine Lösung:

$$y_k = c_1 \cos\left(k \cdot \frac{\pi}{2}\right) + c_2 \sin(k\,\frac{\pi}{2}) \;\;,\;\; k = 0, 1, 2, \ldots$$

Beispiel V.2

$$y_{k+2} + 2y_{k+1} + 4y_k = 0$$

$$m^2 + 2m + 4 = 0$$

$$m_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-16}}{2} = -1 \pm i\sqrt{3}$$

$$R = 2 \;\;,\;\; \varphi = \frac{2\pi}{3}$$

allgemeine Lösung:

$$y_k = 2^k \left(c_1 \cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{3}\right) + c_2 \sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{3}\right)\right) \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

LITERATURVERZEICHNIS

Bosch K.

Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler, R. Oldenbourg Verlag, München 1988

Chiang A.C.

Fundamental Methods of Mathematical Economics, Verlag McGraw-Hill, International Student Edition, New York 1984

Dück W., Körth H., Runge W., Wunderlich L.

Mathematik für Oekonomen I + II, Verlag H. Deutsch, Frankfurt 1989

Jacques, Ian

Mathematics for Economics and Business, 5th ed., Pearson Education Limited, Essex 2006

Goldberg S.

Difference Equations, Verlag John Wiley, New York / London

Pfuff F.

Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler I + II, Verlag Vieweg, Braunschweig 1979

Rommelfanger H.

Differenzen- und Differentialgleichungen, Bibliographisches Institut, Mannheim / Wien / Zürich

Simon C.P. / Blume L.

Mathematics for Economists, Norton & Company, New York, London, 1994