Dima Nikolenkov

Mathe mal anders

Aufgabensammlung mit Lösungen

1. Auflage 2007

Verlag Wilhelm Surbir Wittenbach/SG

Inhaltsverzeichnis

1 Zum Warmlaufen

Die Aufgaben dieses Kapitels sind als Aufwärmeübungen und als Einstimmung für die nachfolgenden Kapitel gedacht. Es werden zu jedem Thema ein bis zwei einfache Beispiele gegeben. Das technische Können, das für die nachfolgenden Aufgaben nötig ist, begrenzt sich auf das Zählen bis 10.

Sollten Sie dieses Buch als Unterrichtsgrundlage benutzen, sorgen die Aufgaben dieses Kapitels dafür, dass alle Teilnehmenden ein Erfolgserlebnis haben. Ausserdem können sich die Teilnehmenden schon auf die Art und Weise, wie solche Probleme anzupacken sind, einstellen.

Aufgabe 1
Welches ist die minimale Anzahl Schnitte, mit denen man eine zylindrische Torte in 8 gleich grosse Stücke schneiden kann?

Aufgabe 2
Man hat eine leere 5-Liter Flasche und einen leeren 4-Liter Topf. Wie kann man genau 3 Liter abmessen?

Aufgabe 3
Der gestiefelte Kater fängt 4 Hechte und zusätzlich noch eine Hälfte des Fanges. Wie viele Hechte fängt er insgesamt?

Aufgabe 4
Nennen Sie zwei aufeinander folgende Zahlen so, dass die eine Zahl die Quersumme 8 hat und die andere Zahl durch 8 teilbar ist.

Aufgabe 5
Drei Jäger kochen Reis. Der erste gibt zwei Tassen Reis, der zweite eine Tasse, der dritte hatte keinen Reis, aber er bietet fünf Patronen als Gegenleistung an. Wie sollen die ersten beiden Jäger die Patronen verteilen?

Aufgabe 6
In der Stadt Verbietensk dürfen in der U-Bahn keine Gegenstände, deren Länge, Breite oder Höhe grösser als 1 m ist, transportiert werden. Der schlaue Erstklässler Vasya hat trotzdem regelgerecht seine 1.50 m langen Ski nach Hause gebracht. Wie ist ihm dies gelungen?

Aufgabe 7
In einem Volleyballturnier spielte jede Mannschaft gegen jede andere genau einmal. 20% der Mannschaften haben kein einziges Mal gewonnen. Wie viele Mannschaften haben an diesem Turnier teilgenommen?

Aufgabe 8
Entziffern Sie das Rätsel $A+BB+A=CCC$ (gleiche Buchstaben stehen für gleiche Ziffern).

11 Invarianten

Eine Invariante ist eine Grösse, die sich im Laufe des Prozesses nicht ändert. Ist diese Grösse für zwei Zustände unterschiedlich, so steht damit fest, dass man von einem dieser Zustände den anderen nicht erreichen kann.

Aufgabe 1
Sechs Kinder haben 1, 2, 3, 4, 5 und 6 Bonbons. Sie merken, dass sie nicht gleich viele haben und fangen an zu weinen. Der arme Vater hat einen grossen Sack mit Bonbons, er kann aber nur jeweils 2 Kindern gleichzeitig je ein Bonbon geben. Wenn alle Kinder gleich viele hätten, würden sie aufhören zu weinen und der Vater könnte schlafen.

Wird der Vater sich ausruhen können?

Aufgabe 2
Auf einem Zauberapfelbaum wachsen 15 Bananen und 20 Orangen. Gleichzeitig darf man 1 oder 2 Früchte nehmen. Wenn man eine Frucht nimmt, wächst sofort die gleiche nach. Wenn man zwei gleichartige Früchte nimmt, wächst eine Orange nach, wenn man zwei verschiedene Obststücke nimmt, wächst eine Banane nach.

Wie muss man ernten, dass nur eine Frucht übrig bleibt?
Welche Frucht ist es?

Aufgabe 3
Zwei kleine Bengel, Peter und Paul, zerreissen die Schulordnung. Peter macht aus einem Fetzen stets drei, Paul zerreisst ein Stück Papier immer in fünf Fetzen. Als die Direktorin den zwei Lausbuben auf die Schliche kommt, verlangt sie, alle Fetzen zu sammeln und das schöne Blatt mit der Schulordnung wieder zusammenzukleben. Peter und Paul haben insgesamt 100 Papierstückchen gefunden. Zeigen Sie, dass die aus diesen Teilen zusammengeklebte Schulordnung unvollständig bleiben muss.

Aufgabe 4
Die Zahlen $1, 2, 3, \ldots, 2005, 2006$ wurden an die Wandtafel geschrieben. Man darf zwei Zahlen auswischen und sie durch ihre Differenz ersetzen. Kann man eine Situation erreichen, wo alle Zahlen an der Tafel Nullen sind?

Aufgabe 5
Es gibt 13 rote, 15 gelbe und 17 grüne Chamäleons auf der Farbinsel. Wenn sich zwei verschiedenfarbige Chamäleons treffen, wechseln sie ihren Farben in die dritte (z. B. gelb trifft rot, dann werden sie beide grün). Ist es möglich, dass nach einer Weile alle Tiere auf der Insel die gleiche Farbe haben?

12 Lösungen

12.1 Zum Warmlaufen

Aufgabe 1
Drei aufeinander senkrechte Schnittebenen durch den Mittelpunkt.

[6] 2

Aufgabe 2
4 Liter Topf füllen, in 5 Liter Topf umleeren. 4 Liter Topf wieder füllen, 5 Liter Topf auffüllen. Rest ist genau 3 Liter.

[6] 4

Aufgabe 3
8 Hechte.

[1] 2

Aufgabe 4
Viele Lösungen, z. B. 71 und 72.

[1] 48

Aufgabe 5
Der erste bekommt alle 5 Patronen.

[9] 1

Aufgabe 3

Jedesmal, wenn Peter ein Stück Papier zerreisst, vergrössert sich die Gesamtanzahl der Fetzen um 2; und wenn Paul einen Fetzen zerreisst, vergrössert sie sich um 4. Da wir am Anfang genau 1 Stück Papier hatten (nämlich die noch intakte Schulordnung), vergrössert sich diese Gesamtanzahl im Laufe der Ordnungswidrigkeit immer um 2 oder um 4 und bleibt folglich immer ungerade. Somit muss sie auch bei der Aufdeckung der Tat ungerade sein; mit 100 Papierstücken kann also die Schulordnung keinesfalls komplett wiederhergestellt werden.

Aufgabe 4

Nein

Am Anfang ist die Summe aller Zahlen S an der Tafel ungerade. Man kann alle Zahlen so in 1003 Paare aufteilen, dass die Summe der Zahlen in jedem Paar ungerade ist.

Wenn wir zwei Zahlen durch ihre Differenz ersetzen, verändert sich die Summe um $2b$:

$$S\mathrm{neu} = S - (a + b) + (a - b) = S - 2b$$

Sie bleibt also ungerade. Wenn wir nur Nullen hätten, wäre die Summe aller Zahlen gerade. $\lightning$

[2] 12.9

Aufgabe 5

Nein.

Wir untersuchen die Anzahl der roten r, grünen gr und gelben ge Chamäleons. Ein Dreier (r, gr, ge) kann in einen der drei Dreier

$$(r - 1, gr - 1, ge + 2) \quad (r - 1, gr + 2, ge - 1) \quad (r + 2, gr - 1, ge - 1)$$

überführt werden. Man sieht, dass sich die Differenz der Anzahl der Tiere zweier Farben entweder nicht ändert oder um 3 ändert (in Abhängigkeit davon welche Farben sich ändern). Ursprünglich haben wir $r - ge = 13 - 15 = -2$. Wenn alle grün sind, sollte $r - ge = 0$ gelten. Diese Grösse kann sich nur um 3 ändern, also kann aus -2 nie 0 werden.

Die anderen Farben untersucht man analog.

[2] 12.10